3.16 CERCURILE LUI LUCAS[24]

„Matematica reprezintă în sine o colecţie de rezultate, care pot fi aplicate la orice.” - Bertrand Russell[25]

Pe latura BC a triunghiului ABC în exterior se construieşte pătratul BCC_1B_1. Fie $\{M\} = AB_1 \cap BC$ şi $\{N\} = AC_1 \cap BC$. Fie P şi Q punctele de intersecţie dintre perpendicularele ridicate din N şi M pe latura BC şi laturile AC, respectiv AB.

Teorema 1153 *Patrulaterul MNPQ este pătrat.*

Demonstraţie. Din asemănările triunghiurilor AQM şiABB_1; APN şi ACC_1;

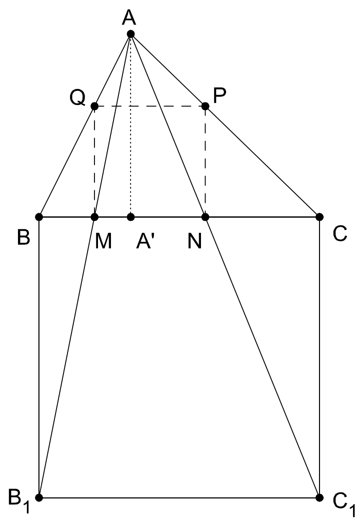

Figura 3.42: Cercul lui Lucas

APN şi AB_1C_1 rezultă:

$$\frac{AM}{AB_1} = \frac{MQ}{BB_1} = \frac{AQ}{AB}, \frac{AN}{AC_1} = \frac{NP}{CC_1} = \frac{AP}{AC}, \frac{MN}{B_1C_1} = \frac{AM}{AB_1} = \frac{AN}{AC_1}, \tag{i}$$

de unde $\frac{MQ}{BB_1} = \frac{NP}{CC_1}$ şi cum $BB_1 = CC_1$, rezultă $MQ = NP$ (Figura 3.42). Deoarece $MQ \parallel NP$ şi $MQ \perp BC, NP \perp BC$ rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi. Atunci, $PQ \parallel BC$ şi $PQ \equiv MN$ (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{QP}{BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{QM}{BB_1}$$

(şi cum $BC \equiv BB_1$), de unde $MN = QM$, deci patrulaterul $MNPQ$ este pătrat. □

[24] Francois Lucas (1842-1891) – mathematician francez, contribuţii în teoria numerelor

[25] Bertrand Russell (1872 - 1970) – filosof, logician şi matematician englez, laureat al Premiului Nobel pentru literatură

Observaţia 1154 *Cercul circumscris triunghiului APQ se numeşte* ***A – Lucas.*** *Analog, se definesc* ***cercurile B – Lucas*** *şi* ***C – Lucas****. Fie L_A, L_B, L_C centrele* ***cercurilor Lucas****. Triunghiul $L_A L_B L_C$ se numeşte* ***triunghiul lui Lucas****.*

Teorema 1155 *Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC şi R raza cercului circumscris acestui triunghi. Pătratul $MNPQ$ are latura de lungime egală cu*

$$\frac{a}{1+\frac{2aR}{bc}}.$$

Demonstraţie. Fie A' piciorul înălţimii duse din A. Din asemănarea triunghiurilor AQP şi ABC rezultă:

$$\frac{AQ}{c}=\frac{AP}{b}=\frac{QP}{a},$$

de unde $AQ=\frac{c}{a}l, AP=\frac{b}{a}l$, $(PQ=l)$, iar din asemănarea triunghiurilor BQM şi BAA' rezultă $\frac{BQ}{AB}=\frac{QM}{AA'}$, de unde $\frac{c-\frac{c}{a}l}{c}=\frac{l}{h_a}$ şi de aici

$$l=\frac{a\cdot h_a}{a+h_a}.$$

Dar $h_a=\frac{2\cdot A_{[ABC]}}{a}=\frac{2\cdot abc}{a\cdot 4R}=\frac{bc}{2R}$, de unde rezultă $l=\frac{a}{1+\frac{2aR}{bc}}$. □

Teorema 1156 *Razele cercurilor A – Lucas, B – Lucas şi C – Lucas sunt egale cu: $R_A=\frac{R}{1+\frac{2aR}{bc}}$, $R_B=\frac{R}{1+\frac{2bR}{ac}}$, respectiv $R_C=\frac{R}{1+\frac{2cR}{ab}}$.*

Demonstraţie. Deoarece triunghiurile APQ şi ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul A şi raportul de omotetie fiind egal cu $\frac{l}{a}=\frac{1}{1+\frac{2aR}{bc}}$ (conform proprietăţii precedente) rezultă că $\frac{R_A}{R}=\frac{l}{a}$, de unde $R_A=\frac{R}{1+\frac{2aR}{bc}}$. Analog se determină lungimile celorlalte două raze. □

Teorema 1157 *Cercul circumscris triunghiului ABC şi cercurile lui Lucas sunt tangente interior.*

Demonstraţie. Deoarece triunghiurile AQP şi ABC sunt omotetice, prin omotetia de centru A şi raport $\frac{1}{1+\frac{2aR}{bc}}$ rezultă că cercurile circumscrise acestor două triunghiuri se corespund prin omotetia considerată, deci cercurile sunt tangente interior (Figura 3.43). □

Observaţia 1158 *Raportul de omotetie poate fi considerat şi sub forma $\frac{R_A}{R}$. Analog se arată că cercurile B – Lucas şi C – Lucas sunt tangente interior cercului circumscris triunghiului ABC.*

Teorema 1159 *Cercurile lui Lucas sunt tangente două câte două.*

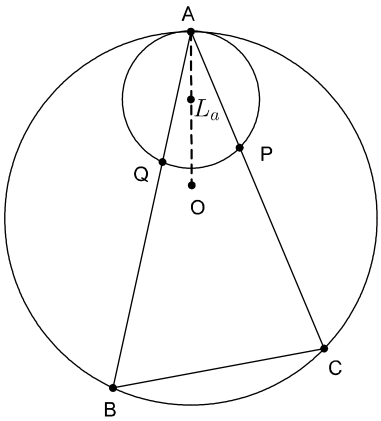

Figura 3.43: $C(O, R)$ şi cercurile Lucas sunt tangente interior

Demonstraţie. Avem: $OL_B = OB - L_BB = R - R_B$, $OL_C = R - R_C$ şi $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle BAC)$. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul OL_BL_C rezultă:

$$L_BL_C^2 = OL_B^2 + OL_C^2 - 2OL_B \cdot OL_C \cdot \cos(\sphericalangle L_BOL_C).$$

Cum $OL_B = R - \frac{R}{1+\frac{2bR}{ac}}$, $OL_C = R - \frac{R}{1+\frac{2cR}{ab}}$ şi

$$\begin{aligned}\cos(\sphericalangle L_BOL_C) &= \cos\widehat{2A} = 2\cos^2\widehat{A} - 1\\ &= 2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) - 1\end{aligned}$$

rezultă

$$L_BL_C = \frac{2R(abc + b^2R + c^2R)\cdot a}{(ac+2bR)(ab+2cR)} = R_B + R_C,$$

deci cercurile B – Lucas şi C – Lucas sunt tangente. Analog, se arată că cercurile A – Lucas şi C – Lucas respectiv B – Lucas şi A – Lucas sunt tangente. □

Teorema 1160 *Laturile triunghiului Lucas au lungimile* $R_A+R_B, R_B+R_C, R_C+R_A$.

Demonstraţie. Vezi teorema precedentă. □

Observaţia 1161 *Fie* T_A, T_B, T_C *punctele de tangenţă dintre cercurile lui Lucas. Triunghiul* $T_AT_BT_C$ *se numeşte* ***triunghiul tangentelor Lucas****. Cercul circumscris triunghiului* $T_AT_BT_C$ *se numeşte* ***cercul radical al cercurilor Lucas****.*