1.4 ORTOCENTRUL UNUI TRIUNGHI

„Legile naturii sunt doar gândurile matematice ale lui Dumnezeu" - Euclid[4]

Fie H_a, H_b, H_c picioarele perpendicularelor duse din vârfurile A, B, respectiv C pe laturile BC, CA, respectiv AB ale unui triunghi ABC. Segmentele AH_a, BH_b şi CH_c se numesc *înălţimile* triunghiului ABC. Triunghiul $H_aH_bH_c$ se numeşte ***triunghiul ortic*** corespunzător triunghiului ABC.

Teorema 70 *Dacă ABC este un triunghi ascuţitunghic, sunt adevărate egalităţile:*

$$\frac{BH_a}{H_aC} = \frac{tgC}{tgB}, \frac{CH_b}{H_bA} = \frac{tgA}{tgC}, \frac{AH_c}{H_cB} = \frac{tgB}{tgA}.$$

Demonstraţie. Din triunghiurile dreptunghice BH_aA şi CH_aA rezultă $BH_a =$

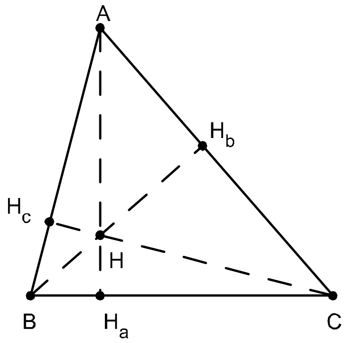

Figura 1.13: $H \in Int(\Delta ABC)$

$\frac{AH_a}{tgB}$ şi $CH_a = \frac{AH_a}{tgC}$ de unde $\frac{BH_a}{H_aC} = \frac{tgC}{tgB}$ (Figura 1.13). Analog se arată şi celelalte egalităţi. □

Teorema 71 *Într-un triunghi înălţimile sunt concurente.*

Demonstraţie. *Soluţia* 1. Fie $\{H\} = AH_a \cap BH_b$. Deoarece $AH \perp BC$ şi $BH \perp CA$ rezultă $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ şi $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Atunci, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, sau $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, de unde $\overrightarrow{CH} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, adică $CH \perp BA$.

Soluţia 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic (demonstraţia ce va urma suferă unele modificări pentru triunghiul obtuzunghic). Utilizând teorema precedentă rezultă:

$$\frac{BH_a}{H_aC} \cdot \frac{CH_b}{H_bA} \cdot \frac{AH_c}{H_cB} = \frac{tgC}{tgB} \cdot \frac{tgA}{tgC} \cdot \frac{tgB}{tgA} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că înălţimile sunt concurente. □

Punctul de intersecţie al înălţimilor unui triunghi se numeşte ***ortocentrul triunghiului*** (H). Dacă triunghiul ABC este ascuţitunghic, ortocentrul se află în interiorul triunghiului (Figura 1.13).

[4] Euclid din Alexandria (330 – 275 î.e.n.) – matematician grec, contribuţii în geometrie

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic $m(\widehat{BAC}) = 90°$, ortocentrul triunghiului este punctul A (Figura 1.14). Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic, ortocentrul se

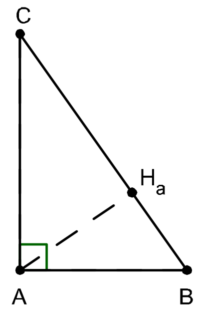

Figura 1.14: $H \equiv A$

află în exteriorul triunghiului ABC (Figura 1.15).

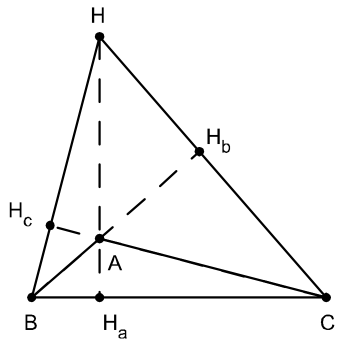

Figura 1.15: $H \in Ext(\Delta ABC)$

Teorema 72 *Fie H ortocentrul unui triunghi nedreptunghic ABC şi $H_aH_bH_c$ triunghiul său ortic. Sunt adevărate egalităţile:*

$$\frac{AH}{HH_a} = \frac{\cos A}{\cos B \cdot \cos C}, \frac{BH}{HH_b} = \frac{\cos B}{\cos C \cdot \cos A}, \frac{CH}{HH_c} = \frac{\cos C}{\cos A \cdot \cos B}.$$

Demonstraţie. Din teorema lui Van-Aubel rezultă

$$\frac{AH}{HH_a} = \frac{AH_b}{H_bC} + \frac{AH_c}{H_cB} = \frac{tgC}{tgA} + \frac{tgB}{tgA} = \frac{\cos A}{\cos B \cdot \cos C}.$$

□

Teorema 73 *Pentru orice punct M din planul unui triunghi nedreptunghic ABC este adevărată egalitatea:*

$$\overrightarrow{MH} = \frac{tgA}{tgA + tgB + tgC}\overrightarrow{MA} + \frac{tgB}{tgA + tgB + tgC}\overrightarrow{MB} + \frac{tgC}{tgA + tgB + tgC}\overrightarrow{MC}.$$

Demonstraţie. Din $\frac{AH}{HH_a} = \frac{tgC+tgB}{tgA}$ şi $\frac{BH_a}{H_aC} = \frac{tgC}{tgB}$ avem:

$$\overrightarrow{MH} = \frac{\overrightarrow{MA} + \frac{tgC+tgB}{tgA}\overrightarrow{MH_a}}{1 + \frac{tgC+tgB}{tgA}} = \frac{tgA \cdot \overrightarrow{MA} + (tgC + tgB) \cdot \overrightarrow{MH_a}}{tgA + tgB + tgC}$$

şi

$$\overrightarrow{MH_a} = \frac{\overrightarrow{MB} + \frac{tgC}{tgB}\overrightarrow{MC}}{1 + \frac{tgC}{tgB}} = \frac{tgB \cdot \overrightarrow{MB} + tgC \cdot \overrightarrow{MC}}{tgB + tgC},$$

de unde rezultă concluzia. □

Teorema 74 *Coordonatele baricentrice absolute ale ortocentrului H al unui triunghi ascuţitunghic ABC sunt*

$$H\left(\frac{tgA}{tgA + tgB + tgC}, \frac{tgB}{tgA + tgB + tgC}, \frac{tgC}{tgA + tgB + tgC}\right).$$

Demonstraţie. Din proprietatea precedentă rezultă cerinţa. □

Observaţia 75 *Deoarece $tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$ rezultă*

$$H(ctgBctgC, ctgCctgA, ctgActgB).$$

Teorema 76 *Fie z_A, z_B, z_C afixele vârfurilor triunghiului ABC. Afixul ortocentrului H al triunghiului ABC este egal cu*

$$z_H = \frac{tgA}{tgA + tgB + tgC}z_A + \frac{tgB}{tgA + tgB + tgC}z_B + \frac{tgC}{tgA + tgB + tgC}z_C.$$

Demonstraţie. Procedând analog ca în teorema 73 obţinem concluzia. □

Teorema 77 *Coordonatele unghiulare ale ortocentrului unui triunghi ascuţitunghic ABC sunt* $180° - m(\widehat{A})$,$180° - m(\widehat{B})$,$180° - m(\widehat{C})$.

Demonstraţie. Avem: $m(\widehat{BHC}) = m(\widehat{H_bHH_c}) = 180° - m(\widehat{A})$ (deoarece patrulaterul AH_cHH_b este inscriptibil). Analog, $m(\widehat{CHA}) = 180° - m(\widehat{B})$ şi $m(\widehat{AHB}) = 180° - m(\widehat{C})$. □

Teorema 78 *Distanţele de la ortocentrul unui triunghi ABC la vârfurile acestuia sunt egale cu $2R\cos A, 2R\cos B, 2R\cos C$.*

Demonstraţie. Deoarece patrulaterul BH_aHH_c este inscriptibil rezultă $m(\widehat{H_cHA}) = m(\widehat{B})$, atunci $\sin\widehat{H_cHA} = \sin\widehat{B} = \frac{H_cA}{AH}$, de unde $AH = \frac{AH_c}{\sin B} = \frac{b\cos A}{\sin B} = 2R\cos A$. Analog se arată că $BH = 2R\cos B$ şi $CH = 2R\cos C$. □

Teorema 79 *Este adevărată relaţia:* $AH + BH + CH = 2(R + r)$.

Demonstraţie. Avem:

$$AH + BH + CH = 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right),$$

dar $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, deci $AH + BH + CH = 2(R + r)$. □

Teorema 80 *Distanţele de la ortocentrul unui triunghi* ABC *la laturile acestuia sunt egale cu* $2R\cos B\cos C, 2R\cos C\cos A, 2R\cos A\cos B$.

Demonstraţie. Din triunghiul dreptunghic BHH_a rezultă $HH_a = BH\cos C = 2R\cos B\cos C$. Analog, $HH_b = 2R\cos C\cos A$ şi $HH_c = 2R\cos A\cos B$. □

Teorema 81 *Ortocentrul* H *al triunghiului* ABC *aparţine dreptei lui Euler a triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Euler“. □

Teorema 82 *Dacă* H *este ortocentrul triunghiului* ABC, O *centrul cercului circumscris triunghiului şi* G *centrul de greutate al triunghiului* ABC, *atunci* $HG = 2GO$ *şi* $HO = 3GO$.

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Euler“. □

Teorema 83 *Dacă* H *este ortocentrul triunghiului* ABC, O *centrul cercului circumscris triunghiului acestui triunghi, atunci*

$$HO^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C).$$

Demonstraţie. Vezi „Centrul cercului circumscris unui triunghi”. □

Teorema 84 *Ortocentrul* H, *centrul cercului circumscris* O *şi punctul lui Longchamps* L *sunt coliniare şi* $HO \equiv OL$ *şi* $LH = 2OH$.

Demonstraţie. Vezi „Punctului lui Longchamps”. □

Teorema 85 *Dacă* G *este centrul de greutate al unui triunghi* ABC, *atunci* $HO = \frac{3}{4}LG$.

Demonstraţie. Vezi „Punctului lui Longchamps”. □

Teorema 86 *Într-un triunghi* ABC *fie* H *ortocentrul său,* O *centrul cercului circumscris,* I *centrul cercului înscris triunghiului,* N *punctul lui Nagel al triunghiului* ABC. *Atunci,* $HN = 2OI$ *şi* $HN \parallel OI$.

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 87 *Segmentele HI şi ON sunt congruente.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 88 *Într-un triunghi ABC fie H ortocentrul său, O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris triunghiului, S_p punctul lui Spieker al triunghiului ABC. Dreptele IH şi S_pO sunt paralele şi $HI = 2S_pO$.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 89 *Ortocentrul H al unui triunghi ABC şi centrul cercului circumscris O al triunghiului ABC sunt puncte izogonal conjugate.*

Demonstraţie. Vezi „Puncte izogonale “. □

Teorema 90 *Simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC faţă de mijlocul unei laturi se află pe cercul circumscris triunghiului.*

Demonstraţie. Fie M_a mijlocul laturii BC şi A' punctul diametral opus lui A (Figura 1.16). Deoarece $BH \perp AC$ şi $A'C \perp AC$ rezultă $BH \parallel CA'$. Analog, rezultă

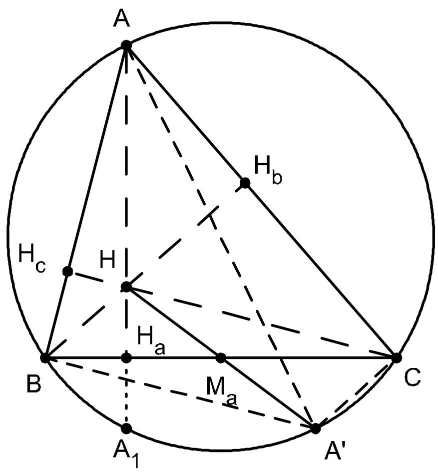

Figura 1.16: Simetricul ortocentrului H faţă de mijlocul unei laturi

$BH \parallel CA'$, deci patrulaterul $BHCA'$ este paralelogram, deci simetricul lui H faţă de M_a este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC. □

Teorema 91 *Simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC faţă de una din laturile triunghiului se află pe cercul circumscris triunghiului .*

Demonstraţie. Fie A_1 punctul de intersecţie dintre înălţimea AH_a şi cercul circumscris triunghiului ABC. Deoarece

$$m(\widehat{HBH_a}) = 90^\circ - m(\widehat{BCA}) = 90^\circ - m(\widehat{BA_1A}) = m(\widehat{A_1BH_a})$$

rezultă că înălţimea BH_a este şi bisectoarea unghiului $\widehat{HBA_1}$, adică triunghiul HBA_1 este isoscel, deci $HH_a = H_aA_1$. □

Observaţia 92 *Fie B_1 şi C_1 simetricele ortocentrului H faţă de laturile AC, respectiv AB. Triunghiul $A_1B_1C_1$ se numeşte* ***triunghiul circumpedal*** *al ortocentrului triunghiului ABC.*

Teorema 93 *Dacă $H_aH_bH_c$ este triunghiul ortic şi H ortocentrul unui triunghi ABC, atunci $AH_a \cdot HH_a = BH_a \cdot CH_a, BH_b \cdot HH_b = AH_b \cdot CH_b, CH_c \cdot HH_c = BH_c \cdot AH_c$.*

Demonstraţie. Vezi „Triunghiul ortic”. □

Teorema 94 *Fie H ortocentrul unui triunghi dat ABC şi $\wp$ cercul circumscris triunghiului ABC. Să se arate că în cercul $\wp$ se pot înscrie o infinitate de triunghiuri care să-l aibă pe H drept ortocentru.*

Demonstraţie. Fie ortocentrul H este situat în interiorul cercului $\wp$ (Figura 1.17). Prin H ducem o coardă oarecare MN şi fie N' simetricul segmentului HN. Prin N'

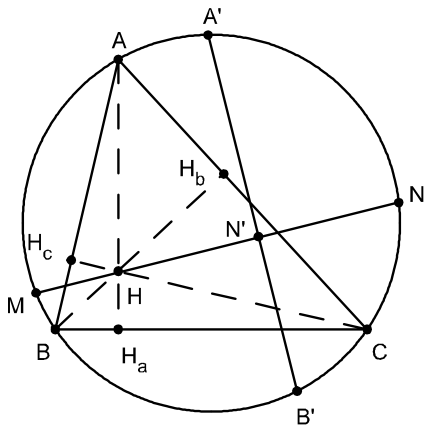

Figura 1.17: Triunghiuri ce-l au pe H drept ortocentru

ducem coarda $A'B'$ perpendiculară pe MN. Deoarece $MN' \perp A'B'$ şi N' este simetricul lui H faţă de $A'B'$ rezultă că H este ortocentrul triunghiului $MA'B'$. Cum coarda MN a fost considerată arbitrară, rezultă că sunt o infinitate de triunghiuri care au punctul H drept ortocentru. Dacă H este situat în extreriorul cercului, atunci una din perpendicularele duse prin mijlocul sementelor HM sau HN intersectează cercul după coarda $A'B'$. □

Teorema 95 *Fie A, B, C, D patru puncte conciclice. Ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA, DAB sunt vârfurile unui patrulater congruent şi invers omotetic cu $ABCD$.*

Demonstraţie. Fie H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele ABC, BCD, CDA respectiv DAB, A' mijlocul laturii BC şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 1.18). Avem:

$$AH_1 = DH_2 = 2OA' \text{ şi } AH_1 || DH_2$$

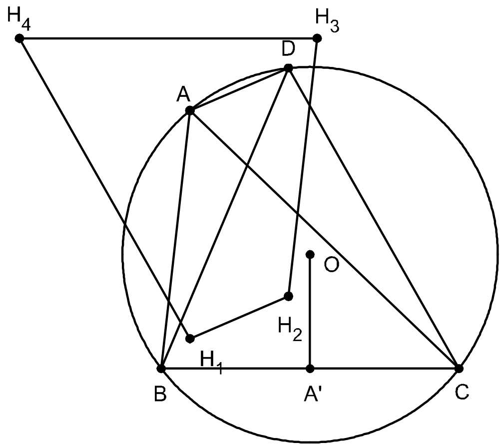

Figura 1.18: H_1, H_2, H_3, H_4

(deoarece $AH_1 \perp BC$ şi $DH_2 \perp BC$), deci patrulaterul AH_1H_2D este paralelogram, de unde rezultă $AD \equiv H_1H_2$ şi $AD || H_1H_2$. Analog se arată că $AB \equiv H_2H_3$, $BC \equiv H_3H_4$, $CD \equiv H_4H_1$ şi $AB || H_2H_3$, $BC || H_3H_4$, $CD || H_4H_1$. Deoarece patrulaterele $ABCD$ şi $H_1H_2H_3H_4$ cu laturile egale şi paralele două câte două rezultă că ele sunt congruente şi omotetice, omotetia fiind inversă deoarece centrul de susţinere se află între vârfurile omoloage. □

Teorema 96 *Laturile unui triunghi determină de două transversale ortogonale, care trec prin ortocentru, segmente propoţionale.*

Demonstraţie. Fie $A' - B' - C'$ şi $A'' - B'' - C''$ cele două transversale ortogonale şi H ortocentrul triunghiului ABC (Figura 1.19). Triunghiurile $A'HB$ şi HAB'', respectiv BHA''şi $AB'H$ sunt asemenea, având laturile perpendiculare două câte două, de unde:

$$\frac{A'H}{B''H} = \frac{BH}{AB''} = \frac{A'B}{AH}$$

şi

$$\frac{BH}{AB'} = \frac{BA''}{AH} = \frac{HA''}{B'H},$$

iar de aici rezultă $\frac{BA'}{BA''} = \frac{AB'}{AB''}$ (i). Din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiurile $CA'B'$ şi $CB''A''$ tăiate de transversala AB rezultă:

$$\frac{BA'}{BC} \cdot \frac{C'B'}{C'A'} \cdot \frac{AC}{AB'} = 1 \qquad \text{(ii)}$$

şi

$$\frac{BA''}{BC} \cdot \frac{C''B''}{C''A''} \cdot \frac{AC}{AB''} = 1. \qquad \text{(iii)}$$

Împărţind relaţiile (ii) şi (iii) membru cu membru rezultă:

$$\frac{BA'}{BA''} \cdot \frac{C'B'}{C'A'} \cdot \frac{C''A''}{C''B''} \cdot \frac{AB''}{AB'} = 1 \qquad \text{(iv)}$$

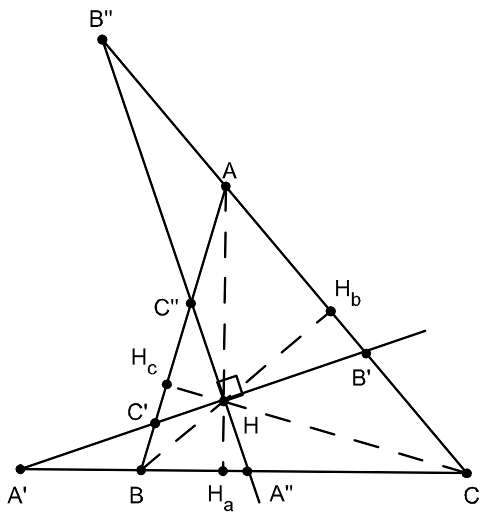

Figura 1.19: Transversale ortogonale care trec prin ortocentrul H

Din relaţiile (i) şi (iv) rezultă $\frac{A'C'}{A''C''} = \frac{B'C'}{B''C''}$. Analog se arată că $\frac{A'C'}{A''C''} = \frac{B'A'}{B''A''}$, de unde $\frac{A'C'}{A''C''} = \frac{B'C'}{B''C''} = \frac{B'A'}{B''A''}$. □

Teorema 97 *Fie H ortocentrul unui triunghi ABC. Cercurile circumscrise triunghiurilor BCH, ACH şi ABH sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie A' al patrulea vârf al paralelogramului $ABA'C$ (Figura 1.20).

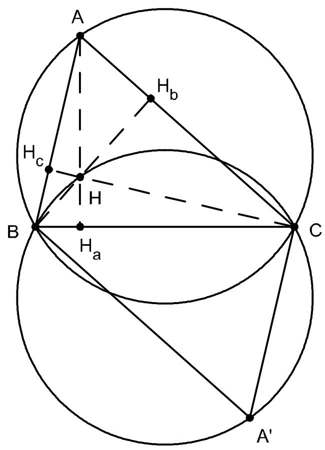

Figura 1.20: Cercurile circumscrise triunghiurilor BCH, ACH şi ABH

Evident, triunghiurile ABC şi $A'CB$ sunt congruente, deci cercurile circumscrise acestor două triunghiuri sunt congruente. Deoarece $m(\widehat{BHC}) = m(\widehat{H_bHH_c}) = 180° -$

$m(\widehat{A'})$ rezultă că patrulaterul $BHCA'$ este inscriptibil, deci cercul circumscris triunghiului BCH este tocmai cercul circumscris triunghiului $A'CB$. Analog se arată pentru triunghiurile ACH şi ABH. □

Teorema 98 *Dacă L este proiecţia ortocentrului triunghiului ABC pe mediana AM_a şi L_1 este simetricul lui L faţă de M_a, atunci L_1 aparţine cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie H_a piciorul înălţimii duse din A pe BC. Avem $LM_a = M_aL_1$ (Figura 1.21). Deoarece patrulaterul HH_aM_aL este inscriptibil, din puterea punctului

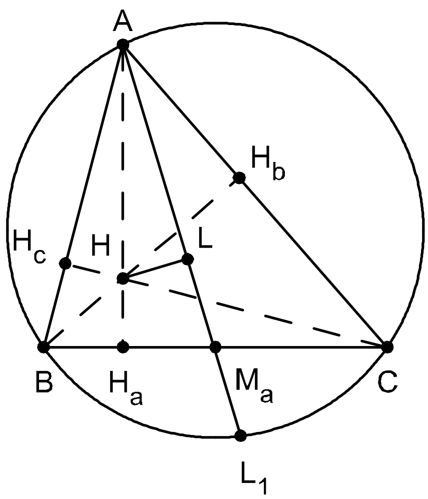

Figura 1.21: Proiecţia ortocentrului pe mediană

A faţă de cercul circumscris acestui patrulater rezultă:

$$AM_a(AM_a - M_aL) = AH_a \cdot AH.$$

Dar

$$AH = 2 \cdot R \cdot \cos A, \ \ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \ AH_a = \frac{2 \cdot S}{a} = \frac{b \cdot c}{2 \cdot R}$$

rezultă:

$$AH_a \cdot AH = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = AM_a(AM_a - M_aL) \tag{i}$$

Fie $\{L'\} = AL \cap \wp$, $\wp$ fiind cercul circumscris triunghiului ABC. Analog, $AM_a \cdot M_aL' = BM_a \cdot M_aC = \frac{a^2}{4}$. Dar $AM_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, de unde rezultă că

$$AM_a(AM_a - M_aL') = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}. \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $M_aL \equiv M_aL'$, deci $M_aL_1 = M_aL'$ sau $L_1 \equiv L'$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 99 *Fie M un punct situat pe cercul circumscris al unui triunghi ABC. Ortocentrul H al triunghiului ABC aparţine dreptei lui Steiner corespunzătoare triunghiului.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Steiner". □

Teorema 100 *Dreptele lui Steiner ale simetricelor ortocentrului H al triunghiului ABC faţă de laturile triunghiului sunt paralele cu laturile triunghiului ortic al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Steiner". □

Teorema 101 *Triunghiul ce are vârfurile oricare trei puncte dintre centrele cercurilor tritangente, are drept ortocentru pe cel de-al patrulea punct din cele de mai sus.*

Demonstraţie. Vezi „Cercuri exînscrise". □

Teorema 102 *Fie o dreptă d ce conţine ortocentrul H al triunghiului ABC. Simetricele dreptei d faţă de laturile triunghiului ABC sunt concurente într-un punct de pe cercul circumscris triunghiului.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul antisteiner". □