3.17 CERCUL LUI FUHRMANN

„Dacă cineva vrea să determine cu un cuvânt laconic şi expresiv despre esenţa matematicii, acela trebuie să spună, că este o ştiinţă despre infinit." - Henri Poincaré[26]

Fie (C) cercul circumscris triunghiului ABC. ***Triunghiul lui Fuhrmann*** al triunghiului ABC este triunghiul $F_AF_BF_C$ ale carui vârfuri sunt simetricele mijloacelor arcelor $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$, respectiv $\overset{\frown}{AB}$, considerate în cercul (C), faţă de laturile triunghiului ABC (Figura 3.44). Cercul circumscris triunghiului lui Fuhrmann se numeşte

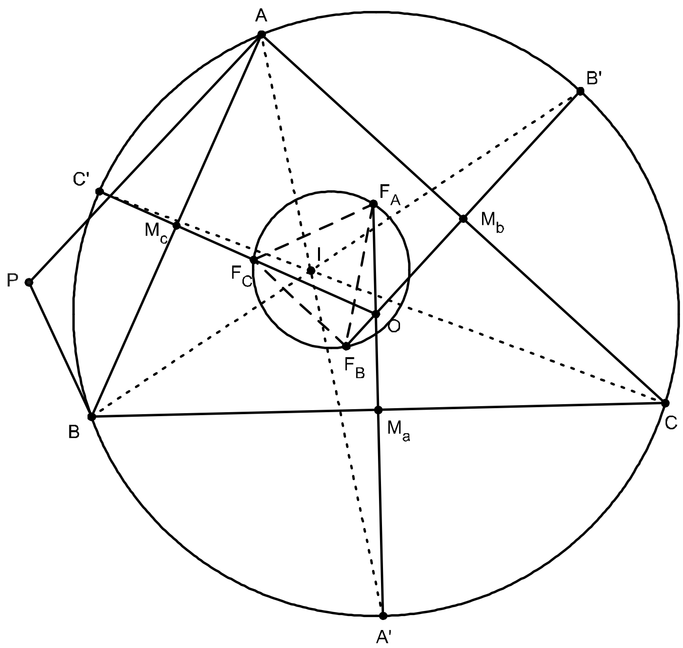

Figura 3.44: Cercul lui Fuhrmann

cercul lui Fuhrmann. Centrul cercului lui Fuhrmann (F) se numeşte ***punctul lui Fuhrmann*** (F). Fie A', B', C' mijloacele arcelor $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$, respectiv $\overset{\frown}{AB}$ şi M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor triunghiului ABC, iar O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Teorema 1162 *Dreptele $A'F_A, B'F_B, C'F_C$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece $OA' \perp BC$ rezultă că $F_AA' \perp BC$, deci $O \in A'F_A$. Analog, $O \in B'F_B$ şi $O \in C'F_C$. □

[26]Henri Poincaré (1854 -1912) – matamatician şi fizician francez, contribuţii importante în toate ramurile matematicii

Teorema 1163 *Triunghiul ABC şi triunghiul Fuhrmann $F_AF_BF_C$ al triunghiului ABC sunt ortologice.*

Demonstraţie. Deoarece $F_AA'\perp BC, F_BB'\perp AC$ şi $F_CC'\perp AB$ iar F_AA', F_BB', F_CC' sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, rezultă că triunghiul $F_AF_BF_C$ este ortologic cu triunghiul ABC. □

Teorema 1164 *Perpendicularele duse din A, B şi C pe laturile F_BF_C, F_AF_C respectiv F_BF_A ale triunghiului Fuhrmann sunt concurente.*

Demonstraţie. Deoarece relaţia de ortologie dintre două triunghiuri este simetrică, rezultă (conform proprietăţii precedente) că triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul Fuhrmann, deci perpendicularele duse din A, B şi C pe laturile F_BF_C, F_AF_C, respectiv F_BF_A sunt concurente într-un punct P. □

Teorema 1165 *Cercurile având centrele în vârfurile F_A, F_B, F_C şi trec prin punctele B şi C, C şi A, respectiv A şi B sunt concurente în punctul P.*

Demonstraţie. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Fie $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$

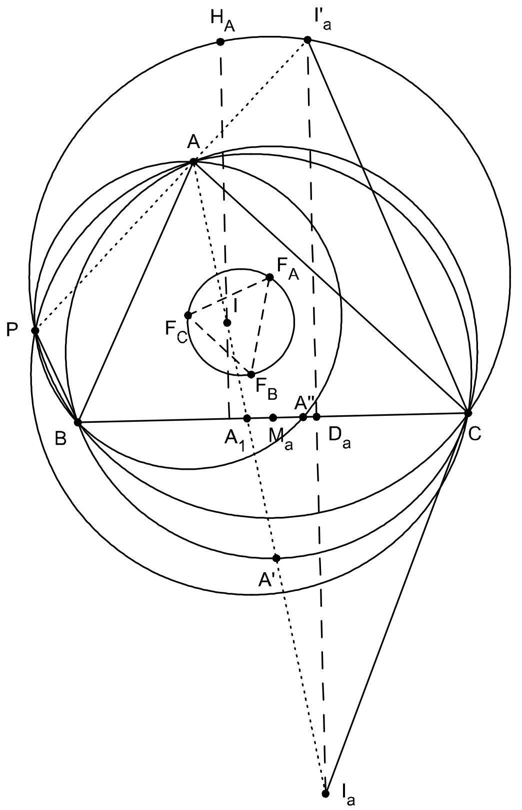

Figura 3.45: Cercurile având centrele în vârfurile F_A, F_B, F_C

cercurile circumscrise triunghiurilor BIC,CIA respectiv AIB, iar $\zeta_a^{'}, \zeta_b^{'}, \zeta_c^{'}$ cercurile având centrele în punctele F_A, F_B, F_C şi trec prin punctele B şi C, C şi A, respectiv A şi B (Figura 3.45). Conform teoremei lui Catalan, centrele cercurilor $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ sunt mijloacele arcelor $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$, respectiv $\overset{\frown}{AB}$ ale cercului circumscris triunghiului ABC. Cercurile ζ_a şi $\zeta_a^{'}$ sunt simetrice faţă de BC; ζ_b şi $\zeta_b^{'}$ sunt simetrice faţă de CA; ζ_c şi $\zeta_c^{'}$ sunt simetrice faţă de AB. Atunci conform teoremei lui Schoute cercurile $\zeta_a^{'}, \zeta_b^{'}, \zeta_c^{'}$ sunt concurente într-un punct Q, linia centrelor fiind perpendiculară pe axa radicală a cercurilor; rezultă că F_CF_B, F_AF_C, F_AF_B sunt mediatoarele segmentelor AQ, BQ, CQ şi conform proprietăţii 1164, rezultă că punctele P şi Q coincid, deci cercurile $\zeta_a^{'}, \zeta_b^{'}, \zeta_c^{'}$ sunt concurente în punctul P. $\square$

Teorema 1166 *Fie I_a centrul cercului A -exînscris corespunzător triunghiului ABC, $I_a^{'}$ simetricul lui I_a faţă de BC. Dacă P este punctul de concurenţă al cercurilor $\zeta_a^{'}, \zeta_b^{'}, \zeta_c^{'}$ (având centrele în vârfurile triunghiului Fuhrmann şi trec prin punctele (B, C), (C, A) respectiv (A, B)), atunci punctele P, A şi $I_a^{'}$ sunt coliniare.*

Demonstraţie. Fie A' mijlocul arcului $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC şi I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Punctele A, I, A' şi I_a sunt coliniare (vezi "Cercurile exînscrise") iar A' este centrul cercului circumscris patrulaterului $BICI_a$ (adică cercul ζ_a (Figura 3.45). Cum cercurile ζ_a şi $\zeta_a^{'}$sunt simetrice faţă de latura BC rezultă că punctul $I_a^{'}$ aparţine cercului $\zeta_a^{'}$. Fie H_A şi H_C ortocentrele triunghiurilor IBC, respectiv IAB, iar A'' al doilea punct de intersecţie dintre cercul $\zeta_c^{'}$ şi dreapta BC. Conform proprietăţii prin care simetricele ortocentrului unui triunghi faţă de laturile acestuia aparţin cercului circumscris triunghiului (vezi „Ortocentrul unui triunghi") rezultă că simetricul lui H_A faţă de BC aparţine lui ζ_a şi deci H_A aparţine lui $\zeta_a^{'}$. Analog $H_c \in \zeta_c^{'}$. Evident I este ortocentrul triunghiului AH_cB. Simetricul său faţă de AB aparţine cercului $\zeta_c^{'}$. Avem:

$$\sphericalangle AH_cB \equiv \sphericalangle AA''B \left(= \frac{1}{2} m(\widehat{APB})\right), \tag{i}$$

iar unghiurile $\sphericalangle AH_cB$ şi $\sphericalangle AIB$ sunt suplementare (I fiind ortocentrul lui AH_cB). Datorită simetriei rezultă $\sphericalangle I_a^{'}CB \equiv \sphericalangle BCI_a$, iar în ζ_a avem:

$$\sphericalangle BCI_a \equiv \sphericalangle BII_a, \tag{ii}$$

de unde $\sphericalangle BCI_a^{'} \equiv \sphericalangle BII_a$. Cum $m(\sphericalangle AH_cB) + m(\sphericalangle AIB) = 180°$ şi $m(\sphericalangle BIA) + m(\sphericalangle BII_a) = 180°$ rezultă $m(\sphericalangle AH_cB) = m(\sphericalangle BII_a)$, adică

$$\sphericalangle AH_cB \equiv \sphericalangle BII_a \tag{iii}$$

Din relaţiile (i), (ii) şi (iii) rezultă $\sphericalangle AA"B \equiv \sphericalangle BCI_a^{'}$, adică $AA" \parallel CI_a^{'}$, relaţie care arată că punctele P, A şi $I_a^{'}$ sunt coliniare (deoarece în $\zeta_c^{'}$ şi $\zeta_a^{'}$ avem

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BPA) &= 180° - m(\sphericalangle BA"A) \\ &= 180° - m(\sphericalangle BCI_a) \\ &= m(\sphericalangle BPI_a^{'}), \end{aligned}$$

cum A şi $I_a^{'}$ se află în acelaşi semiplan faţă de PB rezultă P, A şi $I_a^{'}$ coliniare). $\square$

Observaţia 1167 *Analog se arată că simetricele $I_b^{'}$ şi $I_c^{'}$ ale centrelor cercurilor B-exînscris, respectiv C- exînscris faţă de CA şi AB sunt coliniare cu punctele P şi B, respectiv P şi C.*

Teorema 1168 (*Teorema lui Stevanovic*) *Ortocentrul triunghiului lui Fuhrmann cores punzător triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie.Păstrând notaţiile de mai sus, fie $\{A_1\} = AI_a \cap BC$, M_a mijlocul laturii BC şi $\{D_a\} = I_aI_a^{'} \cap BC$ (Figura 3.45). Datorită simetriei faţă de BC, rezultă că punctele A_1, F_Aşi $I_a^{'}$ sunt coliniare. Dar $IM_a \parallel AD_a$ (vezi „Punctul lui Gergonne”- teorema lui Poncelet) şi $M_aF_A \parallel D_aI_a^{'}$. Din reciproca teoremei lui Desargues aplicată triunghiurilor IF_AM_a şi $AI_a^{'}D_a$ având centrul de omologie A_1 - rezultă $AI_a^{'} \parallel IF_A$. Conform proprietăţii 1164 rezultă $PI_a^{'} \perp F_BF_C$, adică $IF_A \perp F_BF_C$, analog $IF_B \perp F_AF_C$, deci I este ortocentrul triunghiului lui Fuhrmann. □

Teorema 1169 *Dacă afixul cercului circumscris triunghiului ABC este în originea reperului complex , atunci afixul punctului lui Fuhrmann este egal cu*

$$z_F = \frac{z_A(2p-a) + z_B(2p-b) + z_C(2p-c)}{2p}.$$

Demonstraţie. Notăm cu z_X afixul punctului X. Afixul centrului cercului A-exînscris este

$$z_{I_a} = \frac{c(a+b)z_C + (b-a)[az_A + bz_B]}{(a+b)(b+c-a)} \tag{i}$$

(vezi [12, § III.5]), iar afixul centrului cercului înscris în triunghiul ABC este

$$z_I = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}. \tag{ii}$$

Deoarece A' este mijlocul segmentului II_a (vezi „Cercurile exînscrise”) rezultă

$$z_{A'} = \frac{z_I + z_{I_a}}{2} \tag{iii}$$

Cum M_a este mijlocul segmentului $A'F_A$ rezultă

$$z_{F_A} = 2z_{M_A} - z_{A'} = z_B + z_C - \frac{z_I + z_{I_a}}{2}.$$

Analog se determină afixele punctelor F_B şi F_C, de unde rezultă afixul centrului de greutate al triunghiului $F_AF_BF_C$:

$$\begin{aligned} z_{G_F} &= \frac{z_{F_A} + z_{F_B} + z_{F_C}}{3} \\ &= \frac{z_A(4p-a) + z_B(4p-b) + z_C(4p-c)}{6p}. \end{aligned}$$

Deoarece I este ortocentrul triunghiului $F_AF_BF_C$ rezultă $IG_F = 2G_FF$ (unde F este centrul cercului lui Fuhrmann), deci $z_{G_F} = \frac{z_I + 2z_F}{3}$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 1170 *Centrul cercului lui Fuhrmann corespunzător unui triunghi ABC este mijlocul segmentului HN, unde H şi N sunt ortocentrul, respectiv punctul lui Nagel al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci,

$$\begin{aligned} z_H &= z_A + z_B + z_C, \\ z_F &= \frac{z_A(2p-a) + z_B(2p-b) + z_C(2p-c)}{2p}, \\ z_N &= \frac{z_A(p-a) + z_B(p-b) + z_C(p-c)}{p}. \end{aligned}$$

Deoarece $\frac{z_H+z_N}{2} = z_F$ rezultă concluzia. □

Teorema 1171 *Punctul lui Nagel şi ortocentrul unui triunghi ABC aparţin cercului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece

$$|z_H - z_F| = |z_N - z_F| = |z_F - z_{F_A}|,$$

adică $HF = NF = FF_A$, rezultă că H şi N aparţin cercului lui Fuhrmann. □

Observaţia 1172 *Punctele H şi N sunt diametral opuse în cercul lui Fuhrmann.*

Teorema 1173 *Raza cercului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC are lungimea egală cu lungimea segmentului OI, unde O şi I sunt centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Deoarece $HN \parallel OI$ şi $HN = 2OI$ (vezi„Punctul lui Nagel”), rezultă

$$R_F = \frac{1}{2}HN = OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

□

Consecinţa 1174 *Patrulaterul $IONF$ este paralelogram.*

Teorema 1175 *Centrele cercurilor lui Euler ale triunghiului ABC şi triunghiului lui Fuhrmann coincid.*

Demonstraţie. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, deci $z_O = 0$. Atunci, afixul centrului cercului lui Euler al triunghiului ABC este

$$z_{O_9} = \frac{z_H + z_O}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}.$$

Afixul centrului lui Euler al triunghiului lui Fuhrmann este

$$z_{O_9^F} = \frac{z_I + z_F}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}.$$

□

Consecinţa 1176 *Raza cercului lui Euler a triunghiului lui Fuhrmann este egală cu jumătate din lungimea segmentului OI.*

Teorema 1177 *Fie $F_AF_BF_C$ triunghiul lui Fuhrmann corespunzător unui triunghi ABC. Cercurile circumscrise triunghiurilor F_ABC, F_BCA, F_CAB, $F_AF_BF_C$ sunt concurente în ortocentrul triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie H_1 simetricul ortocentrului H faţă de BC (Figura 3.46);

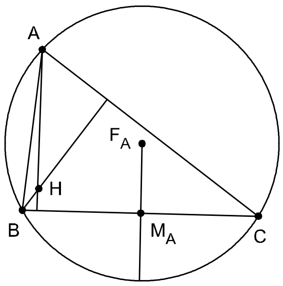

Figura 3.46: Cercuri concurente în H

punctul H_1 aparţine cercului circumscris triunghiului ABC. Deoarece patrulaterele BHF_AC şi $BH_1A'C$ sunt congruente, iar $BHA'C$ este inscriptibil rezultă că şi patrulaterul BHF_AC este inscriptibil, H aparţine cercului circumscris triunghiului F_ABC. Analog se arată că H aparţine cercurilor circumscrise triunghiurilor F_BCA şi F_CAB. Cum H aparţine şi triunghiului $F_AF_BF_C$, rezultă concluzia. □

Teorema 1178 *Simetricul centrului cercului circumscris unui triunghi ABC faţă de punctul lui Spieker al triunghiului ABC este punctul lui Furhmann.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Spieker”. □