3.18 CERCUL LUI LIONNET

„Ştiinţele matematice, ştiinţele naturale şi ştiinţele umanitare pot fi numite, respectiv şi ştiinţe supranaturale, ştiinţe naturale şi ştiinţe nenaturale." - L. D. Landau[27]

Teorema 1179 *Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile $A'BC, AB'C, ABC'$ asemenea cu ABC. Cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun D.*

Demonstraţie. Din condiţia de asemănare rezultă $m(\sphericalangle BA'C) = m(\sphericalangle BAC)$,

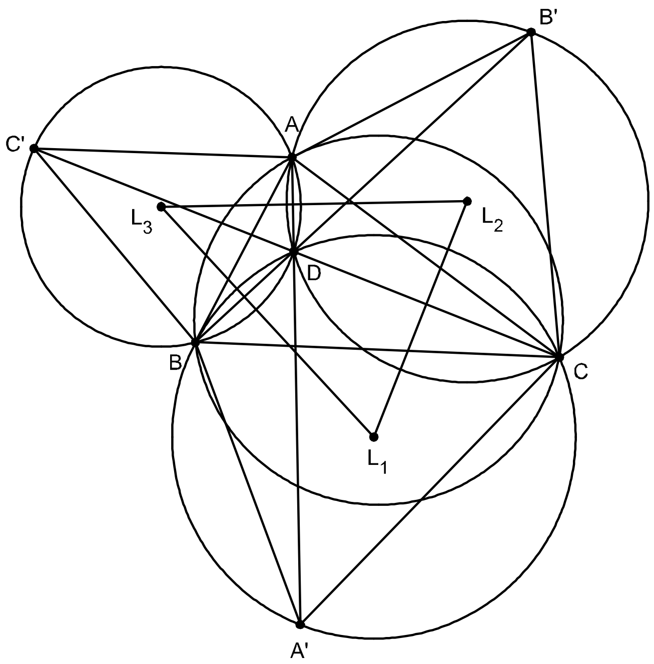

Figura 3.47: Cercul Lionnet

$m(\sphericalangle CBA') = m(\sphericalangle CBA)$, $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle AC'B)$. Fie D punctul de intersecţie dintre cercurile circumscrise triunghiurilor ABC' şi $AB'C$ (Figura 3.47). Atunci, $m(\sphericalangle ADB) = 180° - m(\sphericalangle C)$, $m(\sphericalangle ADC) = 180° - m(\sphericalangle B)$

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BDC) &= 360° - [180° - m(\sphericalangle C) + 180° - m(\sphericalangle B)] \\ &= m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180° - m(\sphericalangle A) = 180° - m(\sphericalangle BA'C), \end{aligned}$$

deci punctul D aparţine cercului circumscris triunghiului $BA'C$. □

Fie L_1, L_2, L_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $A'BC, AB'C, ABC'$. Triunghiul $L_1L_2L_3$ se numeşte ***triunghiul lui Lionnet*** corespunzător triunghiului ABC. Cercul circumscris triunghiului $L_1L_2L_3$ se numeşte ***cercul lui Lionnet***.

[27] L. D. Landau (1908-1968) –fizician rus, laureat al Premiului Nobel pentru Fizică în anul 1962

Teorema 1180 *Triunghiurile $A'B'C'$ şi $L_1L_2L_3$ sunt omologice.*

Demonstraţie. Deoarece

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BDA) &= 180^\circ - m(\sphericalangle C), \\ m(\sphericalangle BDA') &= m(\sphericalangle BCA') = m(\sphericalangle C) \end{aligned}$$

rezultă că $m(\sphericalangle BDA) + m(\sphericalangle BDA') = 180^\circ$, deci punctele A, D, A' sunt coliniare. Analog se arată că B, D, B', respectiv C, D, C' sunt coliniare, deci D este centrul de omologie dintre triunghiurile ABC şi $A'B'C'$. □

Teorema 1181 *Triunghiurile$A'B'C'$ şi $L_1L_2L_3$ sunt ortologice.*

Demonstraţie. Deoarece AD este axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiurilor $AB'C$ şi ABC' rezultă $AD\perp L_2L_3$ deci $AA'\perp L_2L_3$. Analog, $BB'\perp L_1L_3$ şi $CC'\perp L_1L_2$, iar cum $AA'\cap BB'\cap CC' = \{D\}$, rezultă că D este un centru de ortologie, celălalt fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC. □

Teorema 1182 *Triunghiului lui Lionnet $L_1L_2L_3$ este asemenea cu triunghiul $A'B'C'$.*

Demonstraţie. Deoarece $BD\perp L_1L_3$, $CD\perp L_1L_2$ rezultă că

$$\begin{aligned} m(\widehat{L_2L_1L_3}) &= 180^\circ - m(\widehat{BDC}) \\ &= m(\widehat{BA'C}) = m(\widehat{B'A'C'}) \\ &= m(\widehat{BAC}), \end{aligned}$$

şi analog $m(\widehat{L_1L_2L_3}) = m(\widehat{A'B'C'})$, deci triunghiurile $A'B'C'$ şi $L_1L_2L_3$ sunt asemenea. □

Teorema 1183 *Triunghiul lui Lionnet $L_1L_2L_3$ este asemenea cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Din teorema precedentă rezultă concluzia. □

Teorema 1184 *Punctele D şi O sunt izogonale în triunghiul lui Lionnet, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece DL_1 şi perpendiculara din D pe BC sunt drepte izogonale în raport cu unghiul $\sphericalangle BDC$, $(m(\widehat{L_1DB}) = 90^\circ - m(\widehat{BCD}))$, rezultă că DL_1 şi L_1O sunt izogonale în raport cu unghiul $\widehat{L_3L_1L_2}$ $(BD\perp L_1L_3$, $CD\perp L_1L_2)$. □