1.5 PUNCTUL LUI GERGONNE

„Dacă natura n-ar fi atât de minunată nici n-ar merita să o cunoaştem, iar viaţa n-ar merita să fie trăită. Am în vedere nu frumuseţea care îţi sare în ochi, ci acea frumuseţe profundă care se dezvoltă în armonia componentelor sale şi este accesibilă numai raţiunii. Frumuseţea intelectuală oferă satisfacţie prin sine însăşi.” – Henri Poincaré[5]

Teorema 103 *Într-un triunghi ABC dreptele care unesc vârfurile triunghiului cu punctele de contact ale cercului înscris cu laturile opuse sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie C_a, C_b, C_c punctele de tangenţă dintre cercul înscris în triunghiul ABC şi laturile BC, AC respectiv AB (Figura 1.22). Cum $BC_a = BC_c$,

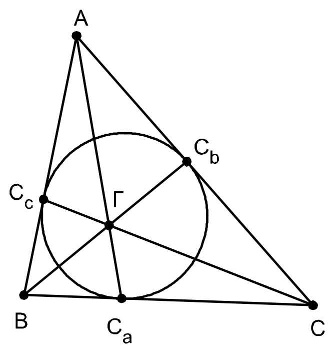

Figura 1.22: Punctul lui Gergonne

$CC_a = CC_b$ şi $AC_b = AC_c$, avem: $\frac{C_aB}{C_aC} \cdot \frac{C_bC}{C_bA} \cdot \frac{C_cA}{C_cB} = 1$, iar din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AC_a, BC_b şi CC_c sunt concurente. □

Punctul Γ de concurenţă al dreptelor AC_a, BC_b şi CC_c se numeşte ***punctul lui Gergonne***[6].

Teorema 104 *Dacă* (Γ) *este punctul lui Gergonne al triunghiului* ABC, *iar* $C_aC_bC_c$ *triunghiul său de contact, atunci*

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma C_a} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}, \frac{B\Gamma}{\Gamma C_b} = \frac{b(p-b)}{(p-c)(p-a)}, \frac{C\Gamma}{\Gamma C_c} = \frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}.$$

Demonstraţie. Din teorema lui Van-Aubel rezultă

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma C_c} = \frac{AC_c}{C_cB} + \frac{AC_b}{C_bC} = \frac{p-a}{p-b} + \frac{p-a}{p-c} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

Analog se demonstrează şi celelalte două egalităţi. □

[5] Henri Poincaré (1854 -1912) – matamatician şi fizician francez, contribuţii importante în toate ramurile matematicii

[6] Joseph Gegonne (1771-1859) – matematician francez, fondator al revistei Annales de Mathématiques în 1810

Teorema 105 *Este adevărată relaţia:* $\frac{A\Gamma}{\Gamma C_a} \cdot \frac{B\Gamma}{\Gamma C_b} \cdot \frac{C\Gamma}{\Gamma C_c} = \frac{4R}{r}$.

Demonstraţie. Soluţia este imediată ţinând cont de teorema precedentă şi de formulele $A_{[ABC]} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr$. □

Teorema 106 *Dacă* (Γ) *este punctul lui Gergonne al triunghiului* ABC, *atunci pentru orice punct* M *din planul triunghiului* ABC *este adevărată egalitatea:*

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{p-a}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{p-b}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{p-c}\overrightarrow{MC}\right),$$

unde $s = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$.

Demonstraţie. Din $\frac{A\Gamma}{\Gamma C_a} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}$ rezultă

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \frac{\overrightarrow{MA} + \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}\overrightarrow{MC_a}}{1 + \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}}, \tag{i}$$

dar $\frac{BC_a}{C_aC} = \frac{p-b}{p-c}$, de unde

$$\overrightarrow{MC_a} = \frac{\overrightarrow{MB} + \frac{p-b}{p-c}\overrightarrow{MC}}{1 + \frac{p-b}{p-c}} = \frac{(p-c)\overrightarrow{MB} + (p-b)\overrightarrow{MC}}{a}. \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă concluzia. □

Teorema 107 *Coordonatele baricentrice relative ale punctului lui Gergonne sunt:*

$$\Gamma\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right).$$

Demonstraţie. Soluţia rezultă din proprietatea precedentă. □

Teorema 108 *Fie* z_A, z_B, z_C *sunt afixele vârfurilor* A, B, C *ale triunghiului* ABC *de laturi* a, b, c. *Afixul punctului lui Gergonne corespunzător triunghiului* ABC *este egal cu*

$$z_\Gamma = \frac{\frac{1}{p-a}z_A + \frac{1}{p-b}z_B + \frac{1}{p-c}z_C}{\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}}.$$

Demonstraţie. Procedând la fel ca în teorema 106, rezultă concluzia. □

Teorema 109 *Punctul lui Gergonne* (Γ) *al triunghiului* ABC *este punctul simedian al triunghiului de contact al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC şi $\{\Gamma\} = AC_a \cap BC_b \cap CC_c$. Deoarece simediana dintr-un vârf al unui triunghi conţine punctul de intersecţie al tangentelor la cercul circumscris duse în celelalte două vârfuri ale triunghiului (vezi „Simediane"), rezultă că C_aA, C_bB şi C_cC sunt simediane în triunghiul $C_aC_bC_c$, deci punctul lor de intersecţie Γ, este punctul lui Lemoine al triunghiului de contact $C_aC_bC_c$. □

Teorema 110 *Punctele lui Gergonne* (Γ) *şi Nagel* (N) *ale triunghiului* ABC *sunt puncte izotomice.*

Demonstraţie. Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC şi D_a, E_b, F_c punctele de tangenţă ale cercurilor exînscrise cu laturile BC, CA, respectiv AB. Deoarece $BD_a = CC_a = p - c$, rezultă că punctele D_a şi C_a sunt simetrice faţă de mijlocul laturii BC. Analog, punctele E_b şi C_b, respectiv F_c şi C_c sunt simetrice faţă de mijloacele laturilor AC, respectiv AB. Deci punctele de concurenţă ale dreptelor (AC_a, BC_b, CC_c) şi (AD_a, BE_b, CF_c) – adică punctul lui Gergonne, respectiv punctul lui Nagel – sunt izotomice. □

Teorema 111 *Fie* ABC *un triunghi neisoscel,* $C_aC_bC_c$ *triunghiul său de contact,*$\{A'\} = C_bC_c \cap BC$,$\{B'\} = C_aC_c \cap AC$,$\{C'\} = C_aC_b \cap AB$. *Punctele* A', B', C' *sunt coliniare.*

Demonstraţie. Teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul ABC (Figura 1.23)

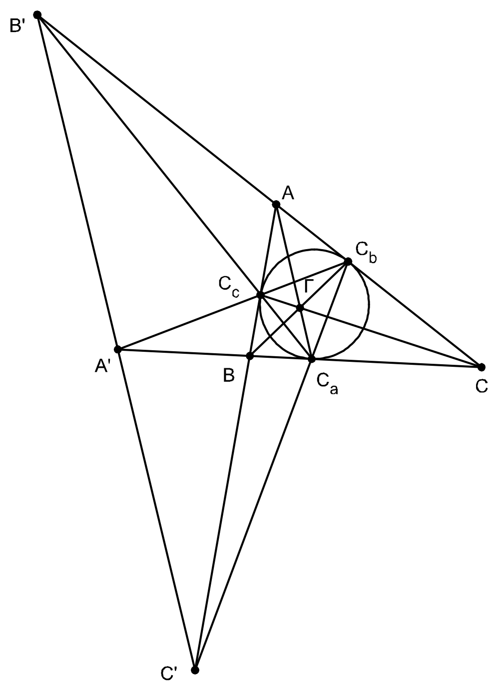

Figura 1.23: Dreapta lui Gergonne

pentru transversalele (A', C_c, C_b), (B', C_c, C_a), respectiv (C', C_a, C_b) dă:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{C_cA}{C_cB} \cdot \frac{C_bC}{C_bA} = 1, \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C_aB}{C_aC} \cdot \frac{C_cA}{C_cB} = 1 \text{ şi } \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{C_aB}{C_aC} \cdot \frac{C_bC}{C_bA} = 1,$$

de unde rezultă că $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \left(\frac{C_aC}{C_aB} \cdot \frac{C_bA}{C_bC} \cdot \frac{C_cB}{C_cA}\right)^2 = 1$. Din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele A', B', C' sunt coliniare. □

Observaţia 112 *Dreapta ce conţine punctele A', B', C' se numeşte* ***dreapta lui Gergonne****.*

Teorema 113 *Dreapta lui Gergonne a triunghiului ABC este polara triliniară a punctului lui Gergonne.*

Demonstraţie. Din proprietatea precedentă, triunghiurile $C_aC_bC_c$ şi ABC fiind omologice, rezultă concluzia. □

Teorema 114 *Punctul lui Gergonne, punctul lui Nagel şi retrocentrul unui triunghi sunt coliniare.*

Demonstraţie. Vezi „Retrocentrul unui triunghi". □

Teorema 115 *Punctul lui Gergonne Γ al triunghiului ABC este propriul său punct ciclocevian.*

Demonstraţie. Vezi „Puncte cicloceviene". □

Teorema 116 (***Teorema lui Poncelet***) *Dreptele care unesc mijloacele laturilor unui triunghi ABC cu respectiv mijloacele cevienelor corespunzătoare punctului lui Gergonne sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Fie M_a mijlocul laturii BC, C_a şi D_a proiecţiile centrului cercului înscris I, respectiv a punctului I_a centrului cercului A–exînscris pe BC, iar P punctul diametral opus lui C_a în cercul înscris în triunghiul ABC (Figura 1.24). Prin

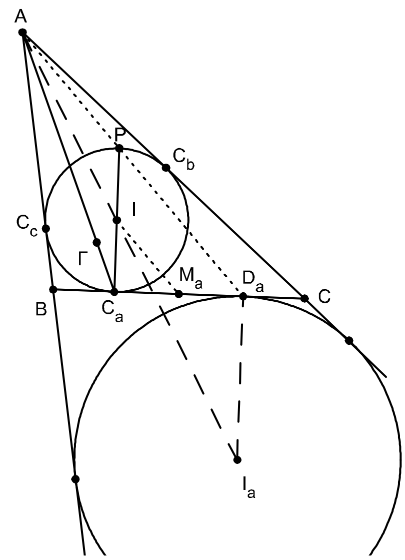

Figura 1.24: Teorema lui Poncelet

omotetia de centru A şi raport $\frac{AI_a}{AI}$, punctul P se transformă în punctul D_a, deci punctele A, P şi D_a sunt coliniare. Cum IM_a este linie mijlocie în triunghiul C_aPD_a rezultă $IM_a \parallel AD_a$, deci IM_a trece şi prin mijlocul segmentului AC_a. Analog se arată că şi celelalte două segmente ce unesc mijloacele laturilor triunghiului cu mijloacele cevienelor punctului lui Gergonne trec prin I. □

Teorema 117 *Punctul lui Gergonne al triunghiului ortic corespunzător unui triunghi ABC este punctul de întâlnire al dreptelor ce unesc picioarele înălţimilor triunghiului ABC cu proiecţiile ortocentrului pe laturile triunghiului ortic.*

Demonstraţie. Înălţimile AH_a, BH_b, CH_c sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic $H_aH_bH_c$ (vezi „Triunghiul ortic”), deci H este centrul cercului înscris în

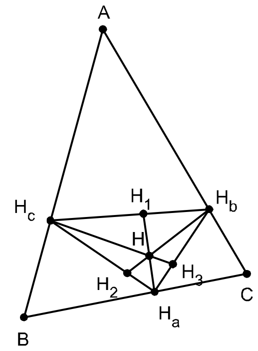

Figura 1.25: Punctul lui Gergonne al triunghiului ortic

triunghiul ortic, iar H_1, H_2, H_3 - proiecţiile lui H pe laturile triunghiului ortic – sunt punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului ortic, deci dreptele H_aH_1, H_bH_2 şi H_cH_3 sunt concurente în punctul lui Gergonne al triunghiului ortic $H_aH_bH_c$ (Figura 1.25). □

Teorema 118 *Dreptele care unesc vârfurile unui triunghi ABC cu punctele de contact dintre un cerc exînscris şi dreptele AB, BC, CA sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de contact dintre cercul A- exînscris şi dreptele BC, CA, respectiv AB (Figura 1.26). Cum $AB_1 = AC_1, BA_1 = BC_1$ şi $CA_1 = CB_1$ rezultă:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente într-un punct Γ_a. Analog, se obţin punctele Γ_b şi Γ_c. Punctele $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ se numesc ***adjunctele punctului Gergonne.*** □

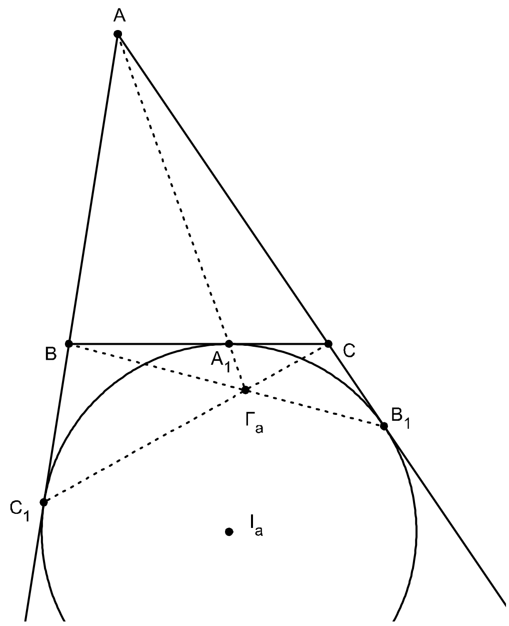

Figura 1.26: Adjunctele punctului Gergonne.

Teorema 119 *Punctele adjuncte ale lui Gergonne* Γ_a, Γ_b, Γ_c *sunt pe cevienele punctului lui Nagel.*

Demonstraţie. Soluţia rezultă din construcţie. □

Teorema 120 *Cevienele punctelor adjuncte ale lui Gergonne sunt concurente în punctul lui Nagel.*

Demonstraţie. Soluţia este evidentă datorită construcţiei. □

Teorema 121 *Triunghiul* ABC *şi triunghiul* $\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c$ *sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Nagel* (N) *al triunghiului* ABC*.*

Demonstraţie. Din proprietăţile precedente rezultă concluzia. □

Teorema 122 *Triunghiul* ABC *şi triunghiul* $N_aN_bN_c$*, ale cărui vârfuri sunt adjunctele punctului lui Nagel al triunghiului* ABC *sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Gergonne* (Γ) *al triunghiului* ABC*.*

Demonstraţie. Vezi proprietăţile precedente. □

Teorema 123 *Coordonatele baricentrice ale adjunctelor punctului Gergonne sunt:*

$$\Gamma_a\left(\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{-a-b+c}, \frac{1}{-a+b-c}\right),$$
$$\Gamma_b\left(\frac{1}{-a-b+c}, \frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a-b-c}\right),$$
$$\Gamma_c\left(\frac{1}{a-b-c}, \frac{1}{-a+b-c}, \frac{1}{a+b+c}\right).$$

Demonstraţie. Soluţie analoagă cu cea din teorema 106. □

Teorema 124 *Triunghiul $N_aN_bN_c$ - având vârfurile în punctele adjuncte ale lui Nagel - şi triunghiul $\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c$ - având vârfurile în punctele adjuncte ale lui Gergonne - sunt omologice, centrul de omologie aparţinând dreptei $N\Gamma$ (unde N este punctul lui Nagel şi Γ este punctul lui Gergonne al triunghiului ABC).*

Demonstraţie. Triunghiul ABC este omologic cu triunghiul $N_aN_bN_c$, iar $\{\Gamma_a\} = BN_c \cap CN_b$, $\{\Gamma_b\} = AN_c \cap CN_a$, $\{\Gamma_c\} = AN_b \cap BN_a$. Conform teoremei lui Voronèse (vezi [12, § III.21]), triunghiurile $N_aN_bN_c$ şi $\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c$ sunt omologice, centrul de omologie aparţinând dreptei ce uneşte centrele de omologie ale triunghiului ABC cu triunghiurile $N_aN_bN_c$, respectiv $\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c$- adică dreptei ΓN. □

Teorema 125 *Într-un triunghi, paralelele duse prin mijloacele laturilor la cevienele punctului lui Gergonne ale vârfurilor opuse trec prin centrele cercurilor exînscrise respective.*

Demonstraţie. Fie M_a mijlocul laturii BC a triunghiului ABC şi Q punctul diametral opus lui D_a în cercul A – exînscris, iar C_a punctul de contact al cercului înscris cu latura BC. Punctele A, C_a şi Q sunt coliniare (vezi „Punctul lui Nagel"). Atunci M_aI_a este linie mijlocie în triunghiul D_aC_aQ, adică $M_aI_a \parallel C_aQ$, deci $A\Gamma \parallel M_aI_a$. □

Teorema 126 *Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile centrului cercului A–exînscris (I_a) al triunghiului ABC pe mediatoarele corespunzătoare laturilor triunghiului ABC. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Gergonne (Γ) al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. În notaţiile proprietăţii precedente, fie A_1 punctul de intersecţie dintre mediatoarea segmentului BC cu dreapta AQ. Deoarece M_a este şi mijlocul segmentului C_aD_a, iar $QD_a \perp BC$ rezultă că A_1 este mijlocul ipotenuzei C_aQ a triunghiului C_aD_aQ, deci patrulaterul $M_aD_aI_aA_1$ este dreptunghi. Am arătat că proiecţia lui I_a pe mediatoarea laturii BC aparţine cevienei din A a punctului lui Gergonne. Analog, se arată că B_1 şi C_1 aparţin cevienelor din B, respectiv C ale punctului lui Gergonne, adică triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Gergonne al triunghiului ABC. □

Teorema 127 *Fie T punctul de contact dintre tangenta dusă din punctul M_a– mijlocul laturii BC a triunghiului ABC - (diferită de BC) la cercul A–exînscris. Punctul T aparţine cevienei $A\Gamma$ (Γ fiind punctul lui Gergonne al triunghiului ABC).*

Demonstraţie. Fie D_a punctul de contact al cercului A–exînscris cu latura BC, C_a punctul de contact al cercului înscris cu latura BC şi Q punctul diametral opus lui D_a în cercul A–exînscris (Figura 1.27). Punctele A, C_a şi Q sunt coliniare (vezi

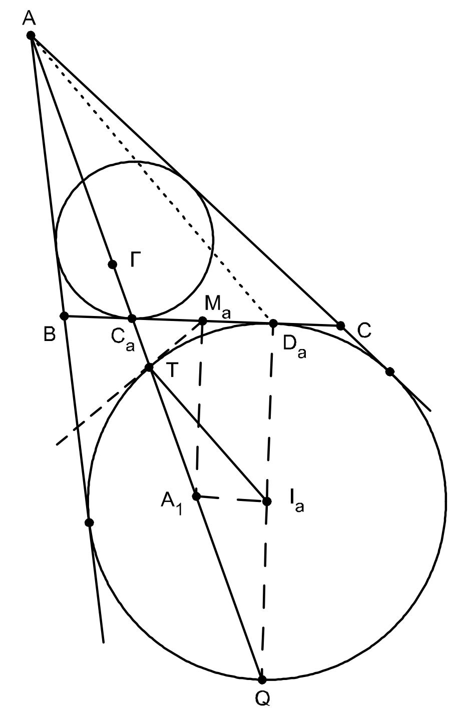

Figura 1.27: T aparţine cevienei $A\Gamma$

„Punctul lui Nagel"). Fie T_1 primul punct de intersecţie dintre ceviana $A\Gamma$ cu cercul A–exînscris. Deoarece $m(\widehat{D_aT_1Q}) = \frac{1}{2}m(\widehat{D_aQ}) = 90°$, rezultă $m(\widehat{C_aT_1D_a}) = 90°$, iar cum punctele C_a şi D_a sunt izotomice, rezultă că TM_a este mediană în triunghiul dreptunghic $C_aT_1D_a$, deci $\widehat{M_aT_1D_a} \equiv \widehat{M_aD_aT_1} \equiv \widehat{T_1QD_a}$, de unde: $m(\widehat{M_aTI_a}) = 90°$, adică $T_1 \equiv T$. □

Teorema 128 *În triunghiul ABC, fie $U \in (AB)$ şi $V \in (AC)$. Punctul lui Gergonne (Γ) al triunghiului ABC aparţine dreptei MN dacă şi numai dacă:*

$$\frac{UB}{UA} \cdot \frac{1}{p-b} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{1}{p-c} = \frac{1}{p-a},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA respectiv AB, iar p este semiperimetrul triunghiului ABC.

Demonstraţie. Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC (Figura 1.28). Deoarece dreapta UV trece prin punctul lui Gergonne atunci

$$\frac{UB}{UA} \cdot \frac{C_aC}{BC} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{BC_a}{BC} = \frac{\Gamma C_a}{AC_a} \tag{i}$$

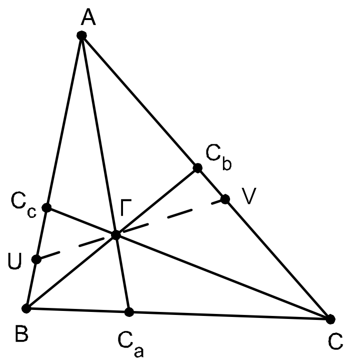

Figura 1.28: $\Gamma \in MN$

(vezi [12, § II.15]). Dar, $\frac{A\Gamma}{\Gamma C_a} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}$ iar $C_aC = p-c$, $BC_a = p-b$, relaţia (i) devenind:

$$\frac{UB}{UA} \cdot (p-c) + \frac{VC}{VA} \cdot (p-b) = \frac{(p-c)\cdot(p-b)}{p-a},$$

de unde rezultă $\frac{UB}{UA} \cdot \frac{1}{p-b} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{1}{p-c} = \frac{1}{p-a}$. □

Teorema 129 *În triunghiul ABC, fie $U \in (AB)$ şi $V \in (AC)$. Punctul lui Gergonne (Γ) al triunghiului ABC aparţine dreptei MN dacă şi numai dacă :*

$$\frac{UB}{UA} \cdot tg\frac{B}{2} + \frac{VC}{VA} \cdot tg\frac{C}{2} = tg\frac{A}{2}.$$

Demonstraţie. Din teorema 128 avem:

$$\frac{UB}{UA} \cdot \frac{1}{b}\frac{(p-a)(p-c)}{ab} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{1}{c}\frac{(p-a)(p-b)}{ab} = \frac{1}{a}\frac{(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Ţinând cont de $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ şi de relaţiile analoage precum şi de teorema sinusurilor obţinem:

$$\frac{UB}{UA} \cdot \frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin B} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin C} = \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A},$$

deci $\frac{UB}{UA} \cdot tg\frac{B}{2} + \frac{VC}{VA} \cdot tg\frac{C}{2} = tg\frac{A}{2}$. □

Teorema 130 *Într-un triunghi ABC, punctul lui Gergonne (Γ), punctul lui Nagel (N) şi centrul antibisector (Z) sunt coliniare.*

Demonstraţie. Fie $U \in (AB)$ şi $V \in (AC)$ astfel încât Γ şi N aparţin dreptei UV. Deoarece $\Gamma \in UV$, atunci

$$\frac{UB}{UA} \cdot tg\frac{B}{2} + \frac{VC}{VA} \cdot tg\frac{C}{2} = tg\frac{A}{2} \tag{i}$$

iar cum $N \in UV$ rezultă:

$$\frac{UB}{UA} \cdot ctg\frac{B}{2} + \frac{VC}{VA} \cdot ctg\frac{C}{2} = ctg\frac{A}{2} \tag{ii}$$

(vezi „Punctul lui Nagel"). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă:

$$\frac{UB}{UA}\cdot\frac{\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{VC}{VA}\cdot\frac{\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}},$$

adică $\frac{UB}{UA}\cdot\frac{1}{\sin B}+\frac{VC}{VA}\cdot\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{\sin A}$ şi de aici $\frac{UB}{UA}\cdot\frac{1}{b}+\frac{VC}{VA}\cdot\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$ (vezi „Centrul antibisector") relaţie care arată că punctul $Z\in UV$. □

Teorema 131 *Fie a,b,c lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC. Dacă dreapta ce uneşte punctul lui Gergonne (Γ) cu punctul lui Nagel (N) al triunghiului ABC este paralelă cu latura AB, atunci $c=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.*

Demonstraţie. Fie $\Gamma_a,\Gamma_b,\Gamma_c$ şi N_a,N_b,N_c picioarele cevienelor determinate de punctul lui Gergonne, respectiv punctul lui Nagel cu laturile triunghiului ABC (Figura 1.29). Din teorema lui Van – Aubel rezultă:

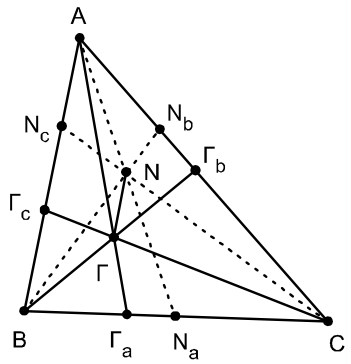

Figura 1.29: $\Gamma N||AB$

$$\frac{C\Gamma}{\Gamma\Gamma_c}=\frac{C\Gamma_a}{\Gamma_a B}+\frac{C\Gamma_b}{\Gamma_b A}=\frac{p-c}{p-b}+\frac{p-c}{p-a} \tag{i}$$

şi

$$\frac{CN}{NN_c}=\frac{CN_a}{N_a B}+\frac{CN_b}{N_b A}=\frac{p-b}{p-c}+\frac{p-a}{p-c}. \tag{ii}$$

Deoarece $\Gamma N||AB$ rezultă $\frac{C\Gamma}{\Gamma\Gamma_c}=\frac{CN}{NN_c}$ (iii). Din relaţiile (i), (ii) şi (iii) rezultă $c=\frac{a^2+b^2}{a+b}$. □

Teorema 132 *Dacă $A_{[ABC]}, A_{[\Gamma BC]}, A_{[\Gamma AC]}, A_{[\Gamma AB]}$ sunt ariile triunghiului $ABC, \Gamma BC$, ΓAC, respectiv ΓAB, unde Γ este punctul lui Gergonne al triunghiului ABC, atunci:*

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma BC]}}+\frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma AC]}}+\frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma AB]}}=\frac{r_a+r_b+r_c}{r}.$$

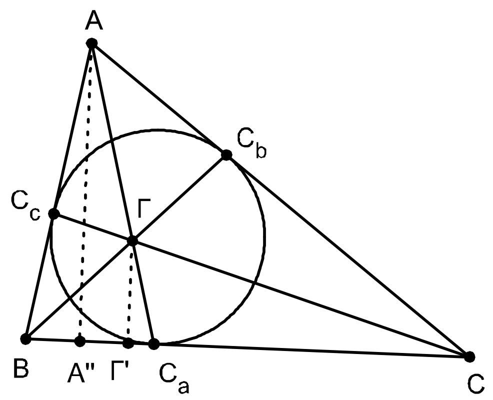

Figura 1.30: $\frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma BC]}} + \frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma AC]}} + \frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma AB]}}$

Demonstraţie. Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC (Figura 1.30). Dacă $p = \frac{a+b+c}{2}$, atunci $AC_b = AC_c = p-a, BC_c = BC_a = p-b, CC_a = CC_b = p-c$. Dacă A'' şi Γ' sunt proiecţiile punctelor A şi Γ pe latura BC obţinem:

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma BC]}} = \frac{AA'' \cdot BC}{\Gamma\Gamma'} = \frac{AA''}{\Gamma\Gamma'} = \frac{AC_a}{\Gamma C_a}.$$

Din relaţia lui Van Aubel avem: $\frac{A\Gamma}{\Gamma C_a} = \frac{p-a}{p-b} + \frac{p-a}{p-c} = \frac{r_b}{r_a} + \frac{r_c}{r_a}$ de unde

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma BC]}} = 1 + \frac{A\Gamma}{\Gamma C_a} = 1 + \frac{r_b + r_c}{r_a} = \frac{r_a + r_b + r_c}{r_a}$$

şi analog

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma BC]}} = \frac{r_a + r_b + r_c}{r_b}, \frac{A_{[ABC]}}{A_{[\Gamma BC]}} = \frac{r_a + r_b + r_c}{r_c}$$

prin sumarea relaţiilor precedente şi ţinând seama că $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ rezultă concluzia. □

Teorema 133 *Dacă două ceviene Gergonne ale unui triunghi ABC au lungimile egale, atunci triunghiul este isoscel.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie BC_b şi CC_c cevienele Gergonne congruente (Figura 1.31). Aplicând teorema cosinusului în triunghiurile ABC_b, respectiv ACC_c rezultă:

$$BC_b^2 = c^2 + (p-a)^2 - 2c(p-a)\cos A, CC_c^2 = b^2 + (p-a)^2 - 2b(p-a)\cos A,$$

unde $p = \frac{a+b+c}{2}$ şi de aici rezultă că:

$$2(b-c)(p-a)\cos A - (b^2 - c^2) = 0$$

egalitate echivalentă cu

$$(b-c)\left[\frac{(-a+b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2bc} - (b+c)\right] = 0.$$

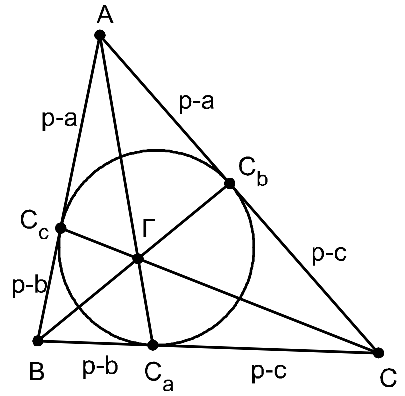

Figura 1.31: Ceviene Gergonne egale

Egalitatea $\frac{(-a+b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2bc} - (b+c) = 0$, echivalentă cu $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) = 0$ nu poate avea loc datorită inegalităţii triunghiului, de unde rezultă că $b = c$, adică triunghiul ABC este isoscel.

Soluţia 2. Fie$\{P\} = BC_b \cap CC_c$. Construim paralelogramul BC_cQC_b (Figura 1.32). Dacă $AB \neq AC$, fie $AB < AC$ $(c < b)$, de unde $p-c > p-b$ şi $m(\widehat{C_bBC}) > m(\widehat{C_cCB})$,

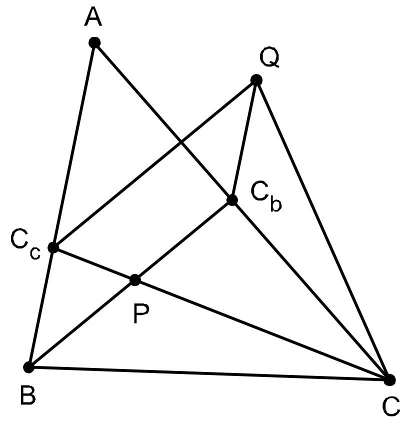

Figura 1.32: Ceviene egale

deci $CP > BP$. Dacă $CC_c \equiv BC_b$ rezultă $C_cP < PC_b$ (i). În triunghiurile ABC şi AC_cC avem: $AC_b = AC_c = p-a$, $CC_c \equiv BC_b$ şi am presupus că $AB < AC$. Urmează că: $m(\widehat{AC_bB}) < m(\widehat{AC_cC})$ şi $m(\widehat{BC_bC}) > m(\widehat{BC_cC})$ de unde rezultă că

$$m(\widehat{PC_bC}) > m(\widehat{PC_cB}) \tag{ii}$$

Din triunghiurile BC_cP şi PC_bC cu $\widehat{BPC_c} \equiv \widehat{C_bPC}$ şi relaţia (ii) rezultă:

$$m(\widehat{C_cBP}) > m(\widehat{PCC_b}) \tag{iii}$$

Cum triunghiul C_cPQ este isoscel rezultă: $\widehat{C_cQC} \equiv \widehat{C_cCQ}$ de unde

$$m(\widehat{C_cQC_b}) + m(\widehat{C_bQC}) = m(\widehat{PCC_b}) + m(\widehat{C_bCQ}).$$

Rezultă $m(\widehat{C_bQC}) > m(\widehat{C_bCQ})$ şi de aici $C_bC < C_bQ$, adică $p - c < p - b$ de unde $b < c$, ceea ce contrazice presupunerea facută. Analog se tratează cazul în care $b > c$. Atunci $b = c$, deci triunghiul ABC este isoscel. □

Teorema 134 [*Barbu, C., Pătraşcu, I. [16]*] *Bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C ale triunghiului ABC întâlnesc ceviana Gergonne AC_a în D, respectiv E. Dacă $BD = CE$, atunci triunghiul ABC este isoscel.*

Demonstraţie. Presupunem $AB \neq AC$, fie $AB < AC$ Atunci, $b > c, p - b < p - c$ şi $D \in (EC_a)$ (Figura 1.33). Din $m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ACB})$ rezultă $m(\widehat{DBC_a}) >$

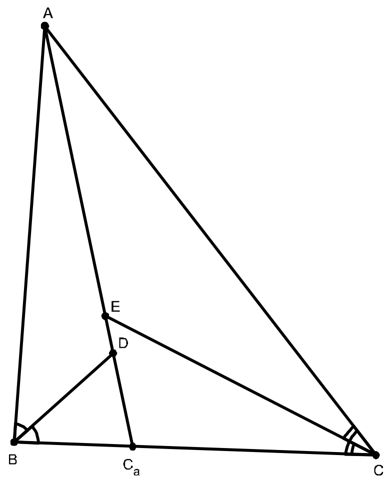

Figura 1.33: Ceviană Gergonne intersectată de către bisectoare

$m(\widehat{ECC_a}) > m(\widehat{DCC_a})$, deci $DC > BD$, adică $DC > CE$ (i) (deoarece $BD \equiv CE$).Cum $m(\widehat{AC_aC}) = m(\widehat{EC_aC}) > 90°$ rezultă că

$$m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DC_aC}) + m(\widehat{DCC_a}) > 90°$$

şi $m(\widehat{DEC}) < 90°$, de unde $CD < CE$ (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) obţinem o contradicţie. Analog, dacă $AB > AC$ se ajunge la o contradicţie. Urmează că $AB \equiv AC$. □

Teorema 135 (*Sastry [80]*) *Bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\angle ABC$ şi $\angle ACB$ ale unui triunghi ABC intersectează dreapta suport a cevianei Gergonne AD (segmentul ce uneşte un vârf al triunghiului cu punctul de tangenţă dintre cercul înscris şi latura opusă) în punctele E, respectiv F. Dacă $BE = CF$, atunci ABC este un triunghi isoscel.*

Demonstraţie. Avem, $BD = p - b$ şi $CD = p - c$ (Figura 1.34). Din $S[ABE] =$

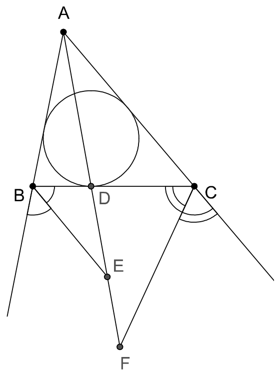

Figura 1.34: Ceviană Gergonne

$S[ABD] + S[BDE]$, avem

$$BE \cdot c \cdot \sin\left(90^\circ + \frac{B}{2}\right) = c \cdot (s-b)\sin B + BE \cdot (s-b) \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right)$$

sau

$$BE \cdot c \cdot \cos\frac{B}{2} = 2c \cdot (s-b)\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} + BE \cdot (s-b) \cdot \cos\frac{B}{2}$$

şi de aici

$$\begin{aligned} BE &= \frac{2c \cdot (s-b)\sin\frac{B}{2}}{b+c-s} \\ &= \frac{2c \cdot (s-b)}{b+c-s} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}. \end{aligned}$$

Analog,

$$CF = \frac{2b \cdot (s-c)}{b+c-s} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Din egalitatea segmentelor BE şi CF rezultă $\sqrt{(s-b)c} = \sqrt{(s-c)b}$, de unde obţinem $b = c$.