1.6 PUNCTUL LUI NAGEL

„Se poate vorbi de un umanism modern, de un sistem complet de cunoştinţe capabil să formeze omul, bazat însă pe matematică? Sunt convins că da." - Ion Barbu[7]

Fie τ_a, τ_b, τ_c punctele de contact dintre cercurile A – exînscris, B – exînscris, respectiv C – exînscris cu laturile BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC (Figura 1.35).

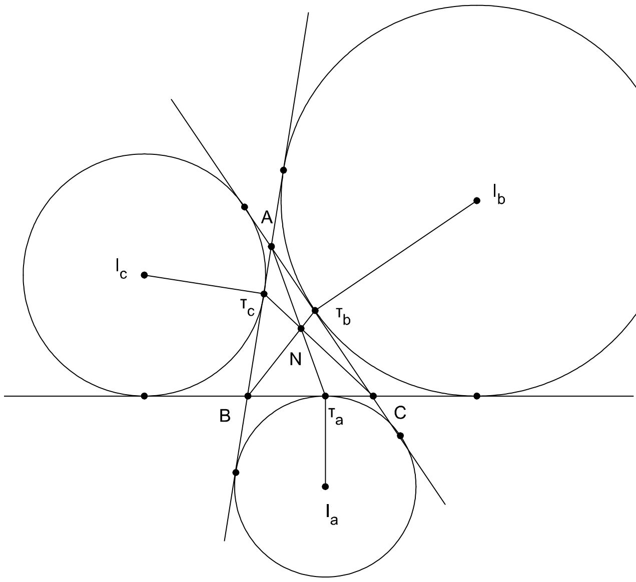

Figura 1.35: Punctul lui Nagel

Teorema 136 (***Teorema lui Nagel***[8]) *Dreptele $A\tau_a, B\tau_b, C\tau_c$ sunt concurente.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC şi p semiperimetrul său. Fie $B\tau_a = x$ şi $\tau_a C = y$. Atunci, $x + y = a$ şi $x + c = y + b$ de unde $x = p - c$ şi $y = p - b$, deci $\frac{\tau_a B}{\tau_a C} = \frac{p-c}{p-b}$. Analog, $\frac{\tau_b C}{\tau_b A} = \frac{p-a}{p-c}$ şi $\frac{\tau_c A}{\tau_c B} = \frac{p-b}{p-a}$, de unde rezultă

$$\frac{\tau_a B}{\tau_a C} \cdot \frac{\tau_b C}{\tau_b A} \cdot \frac{\tau_c A}{\tau_c B} = 1$$

şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele $A\tau_a, B\tau_b, C\tau_c$ sunt concurente.

Soluţia 2. Din $\frac{\tau_a B}{\tau_a C} = \frac{p-c}{p-b}$ rezultă că afixul punctului τ_a este

$$z_{\tau_a} = \frac{z_B + \frac{p-c}{p-b} \cdot z_C}{1 + \frac{p-c}{p-b}} = \frac{(p-b)z_B + (p-c)z_C}{a}$$

[7] Ion Barbu (1895-1961) – matematician român, profesor la Universitatea din Bucureşti, contribuţii în algebră şi geometrie

[8] Christian von Nagel (1803-1882) – matematician german, contribuţii în geometria triunghiului

şi analog se obţin relaţii similare pentru punctele τ_b şi τ_c. Dacă $P \in (A\tau_a)$ şi $k = \frac{AP}{P\tau_a}$ atunci $z_P = \frac{z_A + k z_{\tau_a}}{1+k}$ de unde rezultă:

$$z_P = \frac{1}{1+k}\left[\frac{1}{p-a}(p-a)z_A + \frac{k}{a}(p-b)z_B + \frac{k}{a}(p-c)z_C\right].$$

Se obţine o formă simetrică pentru relaţia din paranteză dacă $\frac{1}{p-a} = \frac{k}{a}$, adică pentru $k = \frac{a}{p-a}$ şi fie N punctul corespunzător acestei valori a lui k. Obţinem un punct ce va avea afixul $z_N = \frac{1}{p}[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C]$. Simetria relaţiei precedente arată că punctul N aparţine şi dreptelor $B\tau_b$, respectiv $C\tau_c$. □

Consecinţa 137 *Afixul punctul lui Nagel* (N) *al triunghiului* ABC *este:*

$$z_N = \frac{1}{p}[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C].$$

Observaţia 138 *Punctul de concurenţă al dreptelor* $A\tau_a, B\tau_b, C\tau_c$ *se numeşte* ***punctul lui Nagel****. Triunghiul* $\tau_a\tau_b\tau_c$ *se numeşte* ***triunghiul lui Nagel*** *(sau* ***triunghiul cotangentic****). Triunghiul cotangentic* $\tau_a\tau_b\tau_c$ *este triunghiul cevian al punctului lui Nagel.*

Teorema 139 *Dacă* N *este punctul lui Nagel al triunghiului* ABC, *atunci pentru orice punct* M *din planul triunghiului este adevărată egalitatea:*

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{p}[(p-a)\overrightarrow{MA} + (p-b)\overrightarrow{MB} + (p-c)\overrightarrow{MC}].$$

Demonstraţie. Din teorema precedentă rezultă concluzia. □

Teorema 140 *Coordonatele baricentrice absolute ale punctului lui Nagel sunt:*

$$N\left(\frac{p-a}{p}, \frac{p-b}{p}, \frac{p-c}{p}\right).$$

Demonstraţie. Vezi teorema 139. □

Teorema 141 *Punctul lui Nagel este centrul de omologie dintre triunghiul neisoscel* ABC *şi triunghiul său cotangentic* $\tau_a\tau_b\tau_c$.

Demonstraţie. Triunghiurile ABC şi $\tau_a\tau_b\tau_c$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Nagel al triunghiului ABC (ca o consecinţă a teoremei lui Desargues).
□

Teorema 142 *Într-un triunghi ABC, punctul lui Nagel (N), centrul de greutate (G) şi centrul cercului înscris (I) sunt coliniare şi $GN = 2GI$.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie A' piciorul bisectoarei din A (Figura 1.36). Din

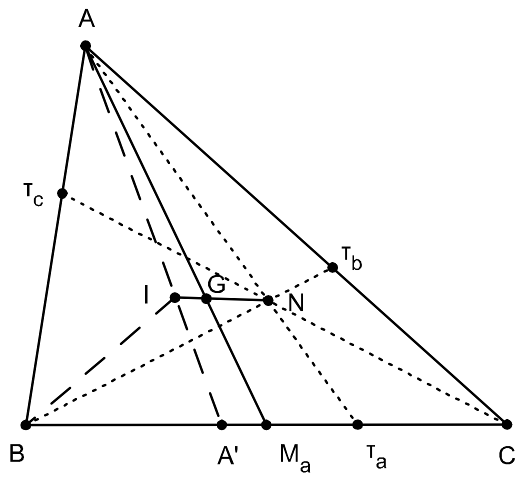

Figura 1.36: $GN = 2GI$

teorema bisectoarei rezultă $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ şi de aici: $A'B = \frac{a+c}{b+c}$. Teorema bisectoarei aplicată în triunghiul ABA' ne dă:

$$\frac{IA}{IA'} = \frac{c}{A'B} = \frac{b+c}{a}, \tag{i}$$

de unde: $\frac{IA'}{AA'} = \frac{a}{2p}$. Dacă M_a este mijlocul segmentului BC iar τ_a şi τ_b punctele de tangenţă al cercurilor A– exînscris şi B – exînscris cu latura BC, respectiv AC, atunci

$$M_a\tau_a = \frac{a}{2} - (p-b) = \frac{b-c}{2},\ A'M_a = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)},$$

de unde

$$\frac{M\tau_a}{MA} = \frac{b+c}{a}. \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $IM_a \parallel A\tau_a$ şi de aici:

$$\frac{IM_a}{A\tau_a} = \frac{IA}{AA'}. \tag{iii}$$

Fie $\{G\} = AM_a \cap IN$. Cum $IM \parallel AN$ rezultă $\frac{GA}{GM_a} = \frac{AN}{IM_a} = \frac{GN}{GI}$ (iv). Din relaţiile (iii) şi (iv) rezultă $\frac{GA}{GM_a} = \frac{NA}{A\tau_a} \cdot \frac{AA'}{IA'}$ (v). Teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul $A\tau_aC$ şi transversala τ_b, N, B ne dă:

$$\frac{\tau_bA}{\tau_bC} \cdot \frac{BC}{B\tau_a} \cdot \frac{N\tau_a}{NA} = 1,$$

de unde $\frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{a}{p-c} \cdot \frac{N\tau_a}{NA} = 1$ şi de aici $\frac{N\tau_a}{NA} = \frac{p-a}{a}$, adică $\frac{N\tau_a}{A\tau_a} = \frac{a}{p}$. Atunci, relaţia (v) devine $\frac{GA}{GM_a} = \frac{a}{p} \cdot \frac{2p}{a} = 2$, de unde $GA = 2GM_a$ (vi), adică G este centrul de greutate al triunghiului ABC, deci punctele N, G şi I sunt coliniare. Din relaţiile (iv) şi (vi) rezultă $GN = 2GI$.

Soluţia 2. Afixele centrului de greutate G al centrului cercului înscris I sunt şi al punctului lui Nagel sunt: $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}$, $z_I = \frac{az_A+bz_B+cz_C}{2p}$ respectiv

$$z_N = \frac{1}{p}[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C].$$

Atunci, $\frac{z_G-z_I}{z_N-z_G} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ deci punctele G, I şi N sunt coliniare şi $|z_N - z_G| = 2\,|z_G - z_I|$, adică: $NG = 2GI$. □

Observaţia 143 *Dreapta IN se numeşte* ***dreapta lui Nagel.***

Teorema 144 *Într-un triunghi ABC fie O centrul cercului circumscris, H ortocentrul său, I centrul cercului înscris triunghiului, N punctul lui Nagel al triunghiului ABC. Atunci $HN = 2OI$ şi $HN \parallel OI$.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie H ortocentrul triunghiuluiABC. Atunci, $HG = 2GO$ (dreapta lui Euler) şi $NG = 2GI$. Din asemănarea triunghiurilor OGI şi HGN (deoarece $\sphericalangle NGH \equiv \sphericalangle OGI$ şi $\frac{GH}{GN} = \frac{GO}{GI}$) rezultă că $HN \parallel OI$ şi $HN = 2OI$.

Soluţia 2. Alegem un reper cartezian cu originea în O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci, $z_H = z_A + z_B + z_C$ şi

$$\frac{z_N - z_H}{z_I - z_O} = -2 \in \mathbb{R}$$

adică $NH \parallel OI$ şi $|z_N - z_H| = 2 \cdot |z_I - z_O|$, adică $NH = 2OI$. □

Teorema 145 *Într-un triunghi ABC fie O centrul cercului circumscris, H ortocentrul său, I centrul cercului înscris triunghiului, N punctul lui Nagel al triunghiului ABC. Patrulaterul $HNOI$ este trapez.*

Demonstraţie. Vezi teorema 144. □

Teorema 146 *În triunghiul ABC fie O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, N punctul lui Nagel şi O_9 centrul cercului lui Euler. Dreapta care uneşte mijloacele segmentelor NI şi NO conţine punctul O_9.*

Demonstraţie. În triunghiul NOI, dreapta (d) care uneşte mijloacele laturilor NO şi NI este paralelă cu dreapta OI, deci paralelă şi cu HN (Figura 1.37). În triunghiul NOH, dreapta d fiind paralelă cu NH rezultă că trece şi prin mijlocul lui OH, adică prin O_9 - centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC. □

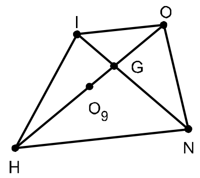

Figura 1.37: $O_9 \in d$

Teorema 147 *Punctul lui Spieker, centrul cercului înscris în triunghiul median al triunghiului ABC, este mijlocul segmentului IN.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC (Figura 1.38). Dacă $IG = 2x$, atunci, conform aplicaţiei precedente, $GN = 4x$,

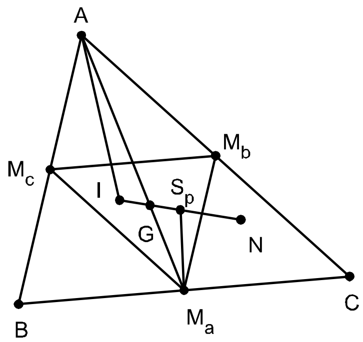

Figura 1.38: S_P este mijlocul segmentului IN

$IN = 6x$. Fie S_P mijlocul segmentului IN. Avem: $IS_P = 3x = S_pN$ şi $GS_P = x$. Deoarece $G \in IS_P$ şi $IG = 2x = 2GS_P$, iar $AG = 2GM_a$ rezultă

$$\frac{AG}{GM_a} = \frac{IG}{GS_P} = 2$$

şi cum $\sphericalangle IGA \equiv \sphericalangle S_PGM_a$ avem că triunghiurile AGI şi M_aGS_P sunt asemenea, deci $AI \parallel S_PM_a$. Dar $AB \parallel M_aM_b, AC \parallel M_aM_c$, iar AI este bisectoarea unghiului BAC, deci şi M_aS_p este bisectoarea unghiului $M_cM_aM_b$. Analog se arată că punctul S_P aparţine bisectoarelor unghiurilor $M_aM_bM_c$ şi $M_bM_cM_a$, deci punctul lui Spieker (S_P) este mijlocul segmentului IN.

Soluţia 2. Atunci $M_bM_c = \frac{a}{2}, M_cM_a = \frac{b}{2}, M_aM_b = \frac{c}{2}$ şi $p' = \frac{p}{2}$ unde p este semiperimetrul triunghiului median. Atunci afixul centrului cercului înscris în triunghiul median este:

$$\begin{aligned} z_{S_p} &= \frac{1}{2p'}\left[\frac{a}{2}\cdot z_{M_a}+\frac{b}{2}\cdot z_{M_b}+\frac{c}{2}\cdot z_{M_c}\right] \\ &= \frac{1}{2p'}\left[\frac{a}{2}\cdot\frac{z_B+z_C}{2}+\frac{b}{2}\cdot\frac{z_C+z_A}{2}+\frac{c}{2}\cdot\frac{z_A+z_B}{2}\right] \\ &= \frac{1}{4p}[(b+c)z_A+(c+a)z_B+(a+b)z_C]. \end{aligned} \tag{i}$$

Dacă S este mijlocul segmentului IN_a, atunci rezultă

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{z_I+z_N}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p}(az_A+bz_B+cz_C)+\frac{1}{p}[(p-a)z_A+(p-b)z_B+(p-c)z_C]\right] \\ &= \frac{1}{4p}\left[(b+c)z_A+(c+a)z_B+(a+b)z_C\right]. \end{aligned} \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $z_{S_p}=z_S$, adică $S_P\equiv S$. □

Teorema 148 *Dreptele IH şi S_pO sunt paralele şi $HI=2S_pO$.*

Demonstraţie. Vezi teorema 147. □

Observaţia 149 *Cercul înscris în triunghiul median se numeşte **cercul lui Spieker**.*

Teorema 150 *Punctele I,G,S_p,N sunt coliniare şi*

$$12GS_p=6GI=4IS_p=3NG=2NI.$$

Demonstraţie. O primă soluţie rezultă din proprietăţile precedente. Coliniaritatea punctelor o mai putem demonstra şi prin utilizarea coordonatelor baricentrice. Astfel, $G(1,1,1),I(a,b,c),N(p-a,p-b,p-c),S(b+c,c+a,a+b)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ p-a & p-b & p-c \end{vmatrix}=0$$

şi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=0$, rezultă că punctele G,I,N, respectiv G,I,S sunt coliniare, adică punctele G,I,N,S sunt coliniare. □

Observaţia 151 *Punctele I,G,S_p,N aparţin dreptei lui Nagel.*

Teorema 152 *Punctele lui Nagel şi Gergonne ale unui triunghi sunt izotomic conjugate.*

Demonstraţie. Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC, G_e - punctul lui Gergonne şi τ_a, τ_b, τ_c punctele de tangenţă ale cercurilor exînscrise cu segmentele BC, CA, respectiv AB. Deoarece $B\tau_a = CC_a = p - c$ rezultă că punctele τ_a şi C_a sunt simetrice faţă de mijlocul laturii BC. Analog, punctele τ_b şi C_b, respectiv τ_c şi C_c sunt simetrice faţă de mijloacele laturilor AC, respectiv AB. Cum dreptele $A\tau_a, B\tau_b, C\tau_c$ sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului ABC, rezultă că punctele lui Nagel şi Gergonne sunt izotomic conjugate. □

Teorema 153 *Centrul cercului înscris în triunghiul ABC este punctul lui Nagel al triunghiului median.*

Demonstraţie. *Soluţia 1.* Fie $M_aM_bM_c$ şi $C_aC_bC_c$ triunghiurile median, respectiv de contact ale triunghiului ABC, $\{C_a^{'}\} = AN \cap BC$, $\{P\} = AN \cap M_bM_c$ şi $\{P'\} = M_aI \cap M_bM_c$ (Figura 1.39). Deoarece $AC_a^{'} \parallel M_aI$ rezultă $AC_a^{'} \parallel M_aP$ (vezi

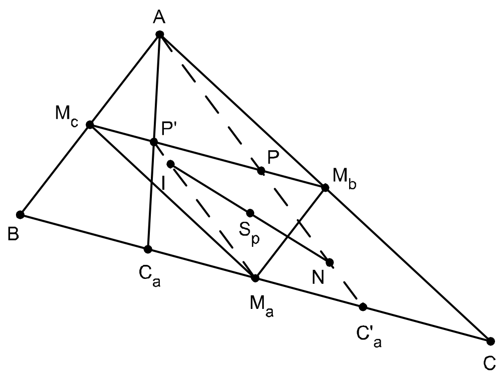

Figura 1.39: I este punctul lui Nagel al triunghiului median

„Cercuri exînscrise") şi punctul M_a este mijlocul segmentului $C_aC_a^{'}$ atunci dreapta M_aI va conţine mijlocul segmentului AC_a - punct ce aparţine liniei mijlocii M_bM_c - deci punctul P'. Cum PP' este linie mijlocie în triunghiul $AC_aC_a^{'}$ rezultă că mediana AM_a trece şi prin mijlocul segmentului PP', deci prin mijlocul segmentului M_bM_c, adică punctele P şi P' sunt izotomice. Conform proprietăţii precedente rezultă concluzia.

Soluţia 2. Fie N' punctul lui Nagel al triunghiului median $M_aM_bM_c$. Atunci, afixul lui N' este:

$$\begin{aligned} z_{N'} &= \frac{1}{p'}[(p'-a')z_{M_a} + (p'-b')z_{M_b} + (p'-c')z_{M_c}] \\ &= \frac{1}{2p}(az_A + bz_B + cz_C) = z_I, \end{aligned}$$

de unde rezultă că $N' \equiv I$. □

Teorema 154 *Punctul lui Nagel al triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul anticomplementar al său.*

Demonstraţie. Se aplică proprietatea precedentă, luând triunghiul median în rolul triunghiului ABC. □

Teorema 155 *Într-un triunghi ABC, distanţa de la punctul lui Nagel (N) la centrul cercului circumscris (O) este egală cu diferenţa dintre raza acestui cerc şi diametrul cercului înscris.*

Demonstraţie. Cercul circumscris triunghiului ABC este cercul lui Euler al triunghiului anticomplementar $A'B'C'$ având raza R. Cercul înscris în triunghiul $A'B'C'$ are centrul în punctul lui Nagel – conform proprietăţii precedente – deci, aceste două cercuri sunt tangente în φ' - punctul lui Feuerbach al triunghiului anticomplementar. Astfel,

$$ON = O\varphi' - N\varphi' = R - 2r,$$

r fiind raza cercului înscris în triunghiul ABC. □

Teorema 156 *Punctele lui Nagel (N), Bevan (V) şi Longchamps (L) sunt coliniare, iar $NV \equiv VL$.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Bevan". □

Teorema 157 *Punctul lui Nagel (N), punctul lui Gergonne (Γ), centrul antibisector (Z) şi retrocentrul (R) unui triunghi ABC sunt coliniare.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Gergonne" şi „Retrocentrul unui triunghi". □

Teorema 158 *Într-un triunghi cevienele punctului lui Nagel (N) trec prin punctele diametral opuse punctelor de contact ale cercului înscris, iar cevienele punctului lui Gergonne (Γ) trec prin punctele diametral opuse ale punctelor de contact ale cercurilor exînscrise respective.*

Demonstraţie. Fie P şi Q punctele diametral opuse lui C_a şi D_a în cercurile înscris, respectiv A – exînscris (Figura 1.40). Din $PC_a \perp BC$ şi $QD_a \perp BC$ rezultă $PC_a \parallel QD_a$. Deoarece cercul înscris şi cel A – exînscris sunt omotetice, omotetia fiind de centru A şi raport $\frac{r_a}{r}$, iar $\frac{I_aD_a}{IP} = \frac{r_a}{r}$ rezultă că punctele D_a şi P se corespund prin omotetia considerată, deci $P \in AN$. Analog, $Q \in A\Gamma$. □

Teorema 159 *Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile centrului cercului înscris (I) al triunghiului ABC pe mediatoarele laturilor triunghiului. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Nagel.*

Demonstraţie. Fie P punctul diametral opus punctului de contact C_a dintre cercul înscris în triunghiul ABC şi latura BC (Figura 1.40). Punctele A, P şi D_a (punctul de tangenţă dintre cercul A – exînscris şi BC) sunt coliniare. Deoarece triunghiul PC_aD_a este dreptunghic, iar I este mijlocul catetei C_aP, atunci IA_1' este linie mijlocie în PC_aD_a (unde A_1' este mijlocul ipotenuzei PD_a), deci $A_1'M_a$ va fi linie mijlocie, de unde rezultă că $A_1'M_a$ este mediatoarea segmentului C_aD_a, deci $A_1' \equiv A_1$. Analog, se arată că B_1 şi C_1 aparţin cevienelor punctului lui Nagel. Deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Nagel (N).

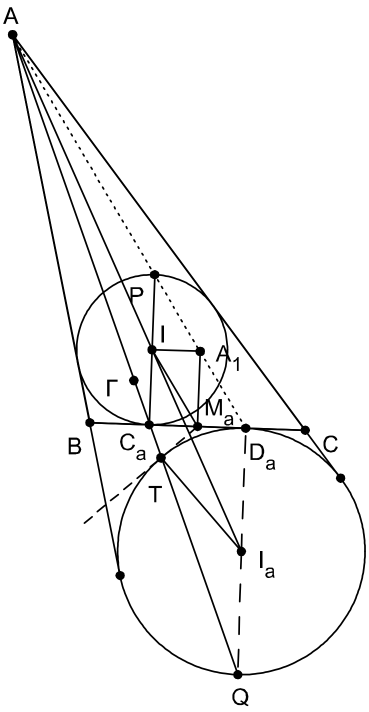

Figura 1.40: $P \in AN$

Teorema 160 *Într-un triunghi, paralelele duse prin mijlocul laturilor la cevienele punctului lui Nagel sunt concurente în centrul cercului înscris.*

Demonstraţie. Fie M_a mijlocul laturii BC şi P punctul diametral opus lui C_a în cercul înscris în triunghiul ABC (Figura 1.40). Din proprietatea precedentă rezultă că punctele A, P şi D_a sunt coliniare. Atunci, IM_a este linie mijlocie în triunghiul PC_aD_a, deci $PD_a \parallel IM_a$, adică $AD_a \parallel IM_a$. □

Teorema 161 *Punctul lui Nagel al triunghiului ABC aparţine cercului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi [12, § III.40]. □

Teorema 162 *Dreptele ce unesc punctul lui Nagel al unui triunghi ABC cu vârfurile acestuia conţin punctele de contact dintre cercul lui Spiecker şi triunghiul median al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC, P punctul de contact dintre cercul lui Spiecker al triunghiului ABC şi latura M_bM_c, $\{D\} = AN \cap BC$, $\{P_1\} = AP \cap BC$ (Figura 1.41). Deoarece laturile triunghiului median au lungimile $a/2, b/2, c/2$ şi P este un punct de contact al cercului înscris în triunghiul $M_aM_bM_c$ rezultă $M_cP = \frac{p-c}{2} = \frac{BD}{2}$ (i) (D fiind punctul de tangenţă dintre cercul

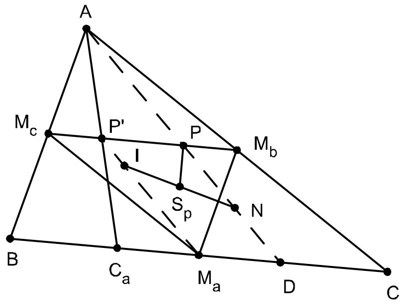

Figura 1.41: $P \in AN$

A – exînscris cu latura BC). Dar M_cP este linie mijlocie în triunghiul ABP_1, deci $M_cP = \frac{BP_1}{2}$ (ii). Din (i) şi (ii) rezultă $BD \equiv BP_1$ şi cum $D, P_1 \in [BC]$ rezultă $D \equiv P_1$, deci $P \in AN$. □

Teorema 163 *Fie Q_A, Q_B, Q_C mijloacele segmentelor AN, BN,respectiv CN (unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC). Triunghiul $Q_AQ_BQ_C$ este circumscris cercului Spieker al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Prin omotetia de centru N şi raport $1/2$ triunghiul $Q_AQ_BQ_C$ se transformă în triunghiul ABC, deci şi cercul înscris în triunghiul $Q_AQ_BQ_C$ se transformă în cercul înscris în triunghiul ABC, iar $\overrightarrow{NS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NI}$ (unde S şi I sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $Q_AQ_BQ_C$ şi ABC), relaţie ce arată că S este punctul lui Spieker al triunghiului ABC. □

Teorema 164 *Fie I şi O centrele cercurilor înscris, respectiv circumscris ale unui triunghi $ABC, MM' \perp AI, M \in AB, M' \in AC, I \in MM'$. Cercul tangent în M şi M' laturilor AB, respectiv AC este tangent şi cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Deoarece mediatoarele OB' şi OC' sunt perpendiculare pe AC,

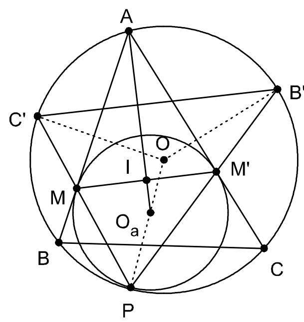

Figura 1.42: (O_a, O_aP) este tangent cercului $\wp(O, R)$

respectiv AB (unde $B', C' \in \wp(O, R)$), rezultă $OB' \parallel O_aM'$ şi $OC' \parallel O_aM$, unde O_a

este centrul crecului tangent laturilor AB şi AC în M, respectiv M' (Figura 1.42). Atunci, triunghiurile $OB'C'$ şi $O_aM'M$ sunt omotetice; fie P centrul acestei omotetii - $\{P\} = C'M \cap B'M'$. Deoarece hexagonul $PC'CABB'$ are cinci vârfuri pe cercul circumscris triunghiului ABC şi că laturile sale se intersectează în punctele coliniare M, I şi M' rezultă – din teorema lui Pascal – că punctul P aparţine cercului circumscris triunghiului ABC. Deoarece $OC' \equiv OP$, rezultă $O_aM \equiv O_aP$, deci P aparţine şi cercului tangent laturilor AB şi AC având centrul în O_a, deci cercul (O_a, O_aP) este tangent cercului $\wp(O, R)$ în P. □

Teorema 165 *Fie MM' ($M \in AB, N \in AC$) perpendiculara în I – centrul cercului înscris în triunghiul ABC – pe bisectoarea AI. Dacă P este punctul de tangenţă dintre cercul circumscris triunghiului ABC şi cercul tangent în M şi M' laturilor AB şi AC, atunci AP este izogonala cevianei AD_a a punctului lui Nagel.*

Demonstraţie. Fie $B_1 \in (AC$ şi $C_1 \in (AB$ astfel încât $AB_1 \equiv AB$ şi $AC_1 \equiv AC$. Dreapta B_1C_1 este a doua tangentă comună cercurilor înscrise în triunghiul ABC şi A – exînscris; C_a şi D_a punctele de tangenţă dintre cercul înscris şi A – exînscris cu dreapta BC (Figura 1.43). Atunci simetricele lor $C_a^{'}$ şi $D_a^{'}$ faţă de bisectoarea

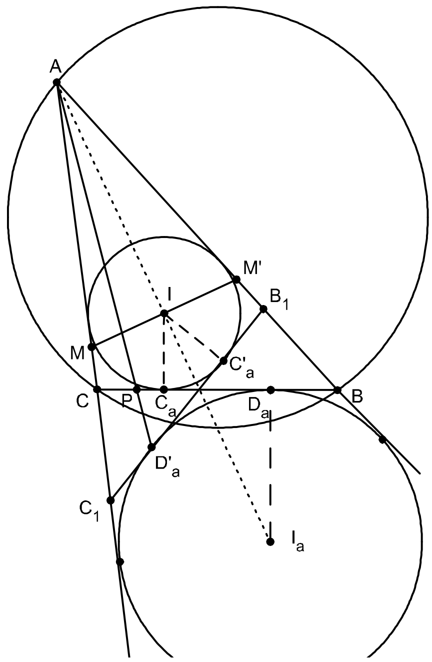

Figura 1.43: Izogonala cevianei AD_a a punctului lui Nagel

unghiului A vor fi punctele de tangenţă dintre B_1C_1 cu cercurile înscris, respectiv A – exînscris, ceea ce arată că $AD_a^{'}$ şi $AC_a^{'}$ sunt izogonalele dreptelorAD_a, respectiv AC_a. Arătăm că punctul $P \in AD_a^{'}$. Prin inversiunea de centru A şi raport $AB \cdot AC$ punctul $D_a^{'}$ se transformă în punctul P, deci dreapta $PD_a^{'}$ trece prin punctul A. □

Teorema 166 *Fie A', B', C' punctele de intersecţie dintre bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi ABC şi cercul circumscris triunghiului ABC, iar $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact corespunzător triunghiului ABC. Dreptele $A'C_a, B'C_b, C'C_c$ sunt concurente în izogonalul punctului lui Nagel.*

Demonstraţie. Fie $\{A''\} = AB \cap B'C'$ (Figura 1.44). Atunci, $m(\sphericalangle AA''B') = \frac{1}{2}[m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)]$,de unde rezultă că

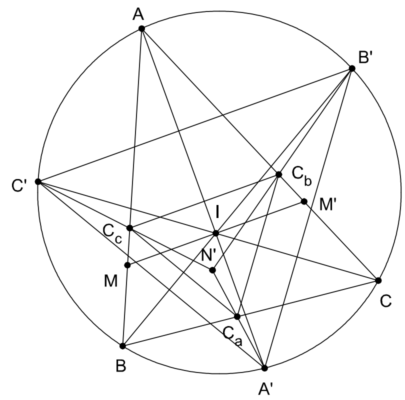

Figura 1.44: Izogonalul punctului lui Nagel

$$m(\sphericalangle AA''B') + m(\sphericalangle A''AA') = \frac{1}{2}[m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle A)] = 90°,$$

deci $AA' \perp BB'$, adică bisectoarea AA' a unghiului A este înălţime în triunghiul $A'B'C'$. Analog , se arată că BB' şi CC' sunt înălţimi în triunghiul $A'B'C'$. Deoarece $AI \perp C_aC_b$ rezultă $C_cC_b \parallel C'B'$. Analog $C_aC_c \parallel A'C', C_aC_b \parallel A'B'$, deci triunghiurile $C_aC_bC_c$ şi $A'B'C'$ sunt omotetice. Fie $\{N'\} = A'C_a \cap B'C_b \cap C'C_c$ centrul acestei omotetii. Conform problemei precedente punctul $\{P\} = AN' \cap \wp(O, R)$ aparţine izogonalei cevienei AD_a a punctului lui Nagel. Deoarece segmentele paralele $B'C', C_bC_c$ şi MM' ($MM' \perp AI, I \in MM'$) sunt omotetice, centrele de omotetie vor fi coliniare. Cum P_a este centrul de omotetie al segmentelor $B'C'$ şi MM', iar A centrul de omotetie al segmentelor MM' şi C_bC_c rezultă că N' centrul de omotetie dintre $B'C'$ şi C_bC_c aparţine dreptei AP_a, adică izogonalei cevianei AD_a a punctului lui Nagel. Analog, se arată că punctul N' aparţine şi izogonalelor cevianelor BE_b şi CF_c ale punctului lui Nagel al triunghiului ABC. □

Teorema 167 *Izogonalul punctului lui Nagel aparţine dreptei ce uneşte centrul cercului înscris (I) cu centrul cercului circumscris (O) al unui triunghi.*

Demonstraţie. Deoarece triunghiul de contact $C_aC_bC_c$ şi triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al lui I sunt omotetice (conform proprietăţii precedente), punctul $\{N'\} = A'C_a \cap B'C_b \cap C'C_c$ - izogonalul punctului lui Nagel – fiind centrul de omotetie (conform proprietăţii precedente), rezultă că centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $C_aC_bC_c$ şi ABC – adică I şi O – se corespund prin această omotetie de centru N' - adică punctele N', I şi O sunt coliniare. □

Teorema 168 *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC, $\{A'\} = AO \cap H_bH_c$, $\{B'\} = BO \cap H_aH_c$, $\{C'\} = CO \cap H_bH_a$. Dreptele $A'H_a, B'H_b, C'H_c$ sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului ortic $H_aH_bH_c$.*

Demonstraţie. Deoarece A, B, C sunt centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ortic $H_aH_bH_c$, iar AO, BO, CO sunt perpendiculare pe H_bH_c, H_cH_a, respectiv H_aH_b (vezi [12, § III.1]), rezultă că A', B', C' sunt punctele de tangenţă dintre cercurile exînscrise triunghiului ortic cu laturile acestuia (Figura 1.45), deci dreptele $A'H_a$, $B'H_b$, $C'H_c$ sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului ortic $H_aH_bH_c$. □

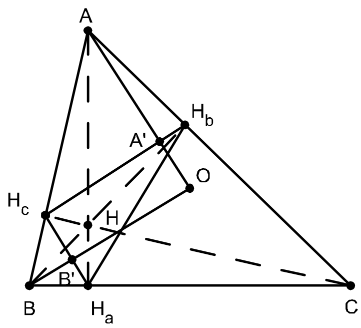

Figura 1.45: Drepte concurente în punctul lui Nagel al triunghiului ortic

Teorema 169 *În triunghiul ABC, fie $U \in (AB), V \in (AC)$. Dacă dreapta UV trece prin punctul lui Nagel (N) al triunghiului ABC, atunci*

$$\frac{UB}{UA} \cdot (p-b) + \frac{VC}{VA} \cdot (p-c) = p-a.$$

Demonstraţie. Fie punctele de tangenţă ale cercurilor exînscrise cu laturile BC, CA, respectiv AB (Figura 1.46). Deoarece $N \in UV$, atunci $\frac{UB}{UA} \cdot \frac{\tau_a C}{BC} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{B\tau_a}{BC} = \frac{N\tau_a}{AN}$, $\frac{N\tau_a}{AN} = \frac{p-a}{a}$ (vezi [12, § II.15]). Atunci: $\frac{UB}{UA} \cdot \frac{p-b}{a} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{p-c}{a} = \frac{p-a}{a}$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 170 *În triunghiul ABC, fie $U \in (AB), V \in (AC)$. Dacă dreapta UV trece prin punctul lui Nagel (N) al triunghiului ABC atunci:*

$$\frac{UB}{UA} \cdot ctg\frac{B}{2} + \frac{VC}{VA} \cdot ctg\frac{C}{2} = ctg\frac{A}{2}.$$

Demonstraţie. Din proprietatea precedentă rezultă următoarea egalitate:

$$\frac{UB}{UA} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{p(p-b)}{ac} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{p(p-c)}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{p(p-a)}{bc}.$$

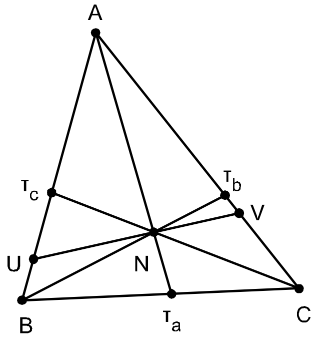

Figura 1.46: $N \in UV$

Utilizând relaţia $\frac{p(p-a)}{bc} = \cos^2 A$ şi analoagele precum şi teorema sinusurilor avem:

$$\frac{UB}{UA} \cdot \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{\sin B} + \frac{VC}{VA} \cdot \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{\sin C} = \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\sin A},$$

de unde rezultă concluzia. □

Teorema 171 *Dacă punctul lui Nagel al unui triunghi ABC aparţine cercului înscris în triunghiul ABC, atunci suma a două laturi ale triunghiului este egală cu triplul celei de a treia.*

Demonstraţie. Fie H_a, C_a, N_a proiecţiile punctelor $A, I,$ respectiv N pe latura BC (Figura 1.47). Din asemănarea triunghiurilor $\tau_a N N_a$ şi $\tau_a A H_a$ rezultă $NN_a =$

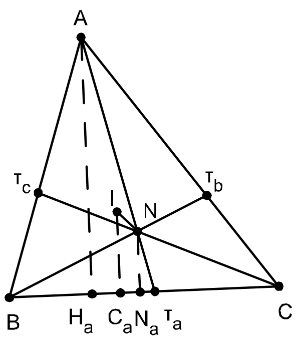

Figura 1.47: N aparţine cercului înscris

$h_a \cdot \frac{\tau_a N}{\tau_a A} = 2r \cdot \frac{p-a}{a}$, $\tau_a N_a = \tau_a H_a \cdot \frac{\tau_a N}{\tau_a A} = \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} - p + b\right) \cdot \frac{p-a}{p} = \frac{(b-c)(p-a)}{a}$şi $\tau_a C_a = b - c$. Deoarece punctul lui Nagel aparţine cercului înscris în triunghiul ABC rezultă $r^2 = (IC_a - NN_a)^2 + C_a N_a^2$, sau $r^2 = r^2 \cdot \frac{(2a-b-c)^2}{a^2} + \frac{(b-c)^2(2a-p)}{a^2}$, de unde rezultă concluzia. □

Observaţia 172 *Segmentul ce uneşte vârful A al triunghiului ABC cu punctul de tangenţă dintre cercul $A-$ exînscris şi latura BC se numeşte ceviană Nagel.*

Teorema 173 *Dacă două ceviane Nagel sunt egale, atunci triunghiul ABC este isoscel.*

Demonstraţie. Fie $[B\tau_b]$, $[C\tau_c]$ cevianele Nagel egale (Figura 1.47). Deoarece $A\tau_b = p-c$ şi $A\tau_c = p-b$, aplicând teorema cosinusului în triunghiurile $AB\tau_b$, $AC\tau_c$ obţinem:

$$\begin{aligned} B\tau_b^2 &= c^2 + (p-c)^2 - 2c(p-c)\cos A, \\ C\tau_c^2 &= b^2 + (p-b)^2 - 2b(p-b)\cos A. \end{aligned}$$

Din egalitatea $B\tau_b^2 = C\tau_c^2$ obţinem

$$(b-c)(b+c-a) + 2(b-c)(b+c-s)\cos A = 0,$$

de unde

$$(b-c)(b+c-a)\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = 0.$$

Cum $b+c-a>0$ şi $\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} > 0$, rezultă $b=c$. □

Observaţia 174 *Fie A_b şi A_c punctele de tangenţă dintre cercul A-exînscris cu dreptele AC şi AB. Segmentele $[BA_b]$ şi $[CA_c]$ se numesc cevianele Nagel exterioare corespunzătoare cercului A-exînscris.*

Teorema 175 *Ceviana Nagel AD şi cevianele Nagel exterioare corespunzătoare cercului A-exînscris sunt concurente.*

Demonstraţie. Soluţia este imediată utilizând reciproca teoremei lui Ceva (Figura 1.48). □

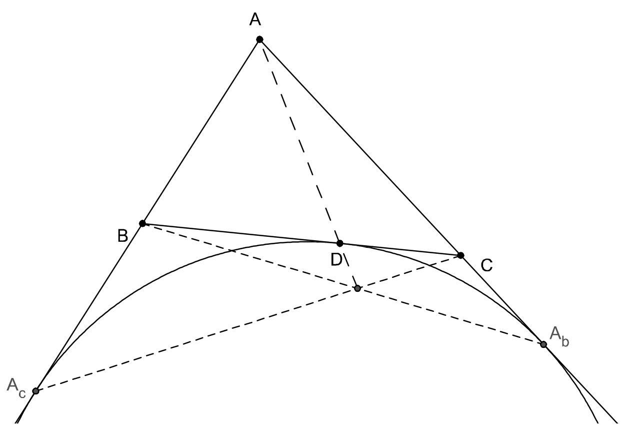

Figura 1.48: Ceviane Nagel exterioare

Observaţia 176 [*Barbu, C., Pătraşcu, I. [16]*] *Apare întrebarea firească: dacă două ceviane Nagel exterioare sunt egale, atunci triunghiul este isoscel?*

Avem $AA_b = AA_c = p$. Aplicând teorema cosinusului în triunghiurile ABA_b şi ACA_c rezultă:

$$\begin{aligned} BA_b^2 &= c^2 + p^2 - 2cp\cos A, \\ CA_c^2 &= b^2 + p^2 - 2bp\cos A. \end{aligned}$$

Din egalitatea segmentelor BA_b şi CA_c obţinem: $(b-c)(b+c-2p\cos A) = 0$. Se obţin cazurile:

(i) $b - c = 0$, deci ABC este isoscel,

(ii) $b + c - 2p\cos A = 0$ sau

$$a^3 + (b+c)\,a^2 - \left(b^2 + c^2\right) a + (b+c)\left[2bc - \left(b^2 + c^2\right)\right] = 0$$

Fie $f(x) = x^3 + (b+c)\,x^2 - \left(b^2 + c^2\right) x + (b+c)\left[2bc - \left(b^2 + c^2\right)\right]$. Avem $f(b) = c\left(2b^2 - c^2\right)$ şi $f(c) = b\left(2c^2 - b^2\right)$. Dacă $0 < b < \frac{c}{\sqrt{2}}$, atunci $f(b) < 0$ şi $f(c) > 0$, deci există $x_0 \in (b, c)$ astfel încât $f(x_0) = 0$. Fie $a = x_0$. Evident, $b < a + c$ şi $a < b + c$. Pentru a avea $c < a + b$, este suficient $c < 2b$.

Deci, pentru $0 < b < \frac{c}{\sqrt{2}} < b\sqrt{2}$, există un triunghi ABC având laturile $b < a < c$ astfel încât $[BA_b]$ şi $[CA_c]$ sunt egale.

Teorema 177 [*Barbu, C., Pătraşcu, I. [16]*] *Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{ABC}$ şi $\widehat{ACB}$ ale unui triunghi ABC intersectează ceviana Nagel AD în E, respectiv F. Dacă $BE = CF$, atunci triunghiul ABC este isoscel.*

Demonstraţie. Avem $BE = \frac{2\cdot BD\cdot AB}{BD+AB}\cdot\cos\frac{B}{2} = \frac{2(p-c)c}{p}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ şi $CF = \frac{2(p-b)b}{p}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$ (Figura 1.49).

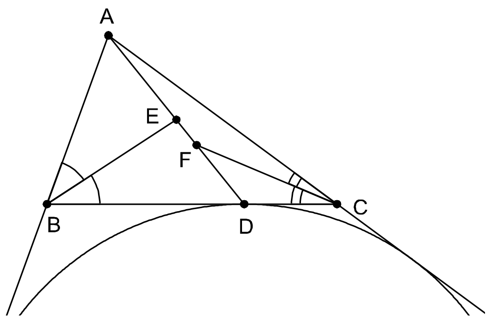

Figura 1.49: Ceviana Nagel AD

Egalitatea $BE = CF$ este echivalentă cu

$$\begin{aligned} \frac{2(p-c)c}{p}\cdot\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} &= \frac{2(p-b)b}{p}\cdot\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}, \\ \frac{a-b-c}{2}\cdot(b-c) &= 0. \end{aligned}$$

Din inegalitatea triunghiului rezultă $b = c$. □

Teorema 178 [*Barbu, C., Pătraşcu, I. [16]*] *Fie E şi F proiecţiile punctelor B, respectiv C pe ceviana Nagel AD. Dacă $BE = CF$, atunci triunghiul ABC este isoscel.*

Demonstraţie. Din congruenţa triunghiurilor BED şi CFD (Figura 1.50), rezultă $BD = CD$, sau. $p - c = p - b$, deci $b = c$. □

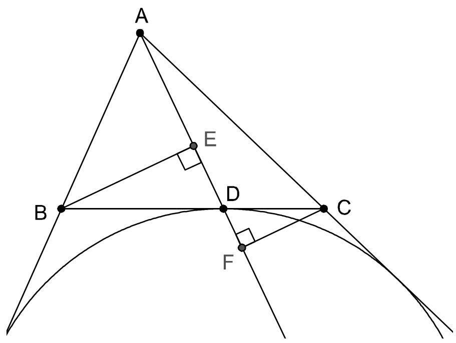

Figura 1.50: Proiecţii egale pe ceviana Nagel

Teorema 179 [*Barbu, C., Pătraşcu, I. [16]*] *Dacă două segmente ce unesc vârfurile unui triunghi ABC cu punctul lui Nagel sunt egale, atunci triunghiul ABC este isoscel sau are laturile în progresie aritmetică.*

Demonstraţie. Fie $BN = CN$. Teorema lui Menelaus aplicată în triunghirile ABE şi ACF cu transversalele $F - N - C$ şi $E - N - B$ dă: $NB = \frac{b}{s} \cdot BE$ şi $NC = \frac{c}{s} \cdot CF$. Din $BN = CN$ şi teorema cosinusului rezultă:

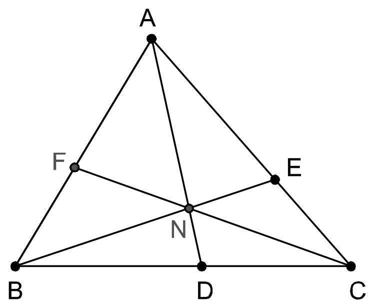

Figura 1.51: $BN = CN$

$$\begin{aligned} b^2[c^2 + (s-c)^2 - 2c(s-c)\cos A] &= c^2[b^2 + (s-b)^2 - 2b(s-b)\cos A] \\ s(b-c)[s(b+c) + a^2 - (b+c)^2] &= s^2(b-c)(2a - b - c) = 0 \end{aligned}$$

de unde $b = c$ sau $a = \frac{b+c}{2}$. □