1.7 PUNCTELE LUI NAGEL ADJUNCTE

"Multe capitole ale matematicii mi-au fost dragi. Matematica e una." - Grigore Moisil[9]

Fie s, R, r, r_a, r_b, r_c respectiv semiperimetrul, raza cercului circumscris, raza cercului înscris şi razele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC.

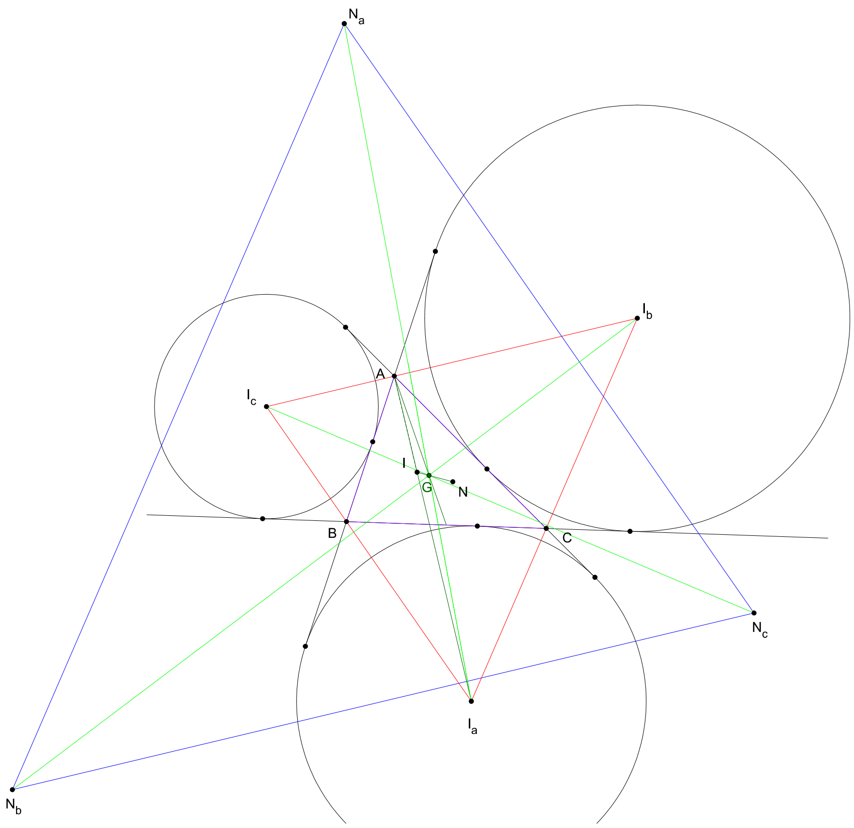

Figura 1.52: Punctele adjuncte ale lui Nagel

Teorema 180 *Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC şi (D_a, E_a, F_a), (D_b, E_b, F_b), (D_c, E_c, F_c) punctele de tangenţă dintre cercurile $A, B, C-$ exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC cu laturile BC, CA respectiv AB. Dreptele AC_a, BE_c, CF_b sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie a, b, c lungimile laturilor BC, CA, respectiv AB şi p semiperimetrul triunghiului ABC. Avem $BC_a = p-b$, $CC_a = p-c$, $AF_b = p-c$, $BF_b = p$, $CE_c = p$, $AE_c = p - b$ (vezi „Cercuri exînscrise") de unde

$$\frac{BC_a}{CC_a} \cdot \frac{F_bA}{F_bB} \cdot \frac{E_cC}{E_cA} = 1,$$

[9] Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, contribuţii în informatică.

adică dreptele AC_a, BE_c şi CF_b sunt concurente într-un punct N_a. □

Observaţia 181 *Analog, cevienele BC_b, CF_a şi AD_c sunt concurente într-un punct N_b, iar cevienele CC_c, AD_b, BE_a sunt concurente într-un punct N_c. Punctele N_a, N_b, N_c se numesc* ***punctele adjuncte ale punctului lui Nagel*** *[10].*

Teorema 182 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *Afixul punctului N_a este egal cu:*

$$z_{N_a} = \frac{sz_A - (s-c)z_B - (s-b)z_C}{s-a}.$$

Demonstraţie. Vezi [9].

Teorema 183 $ON_a = R + 2r_a, ON_b = R + 2r_b$ *şi* $ON_c = R + 2r_c$ (*unde N_a, N_b, N_c sunt punctele adjuncte ale lui Nagel, iar r_a, r_b, r_c lungimile razelor cercurilor exînscrise triunghiului ABC*).

Demonstraţie. Se procedează la fel ca în teorema 155. O demonstraţie utilizând numerele complexe se poate vedea în [10]. □

Teorema 184 *Într-un triunghi ABC, punctul adjunct al lui Nagel (N_a), centrul de greutate (G) şi centrul cercului $A-$ exînscris (I_a) sunt coliniare şi $GN_a = 2GI_a$.*

Demonstraţie. Afixele centrului de greutate G *şi* al centrului cercului $A-$ exînscris I_a sunt: $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3}$, $z_{I_a} = \frac{-az_A+bz_B+cz_C}{2(s-a)}$.

Atunci,

$$\frac{z_G - z_{N_a}}{z_{I_a} - z_G} = 2 \in \mathbb{R},$$

deci punctele G, I şi N sunt coliniare şi $|z_{N_a} - z_G| = 2\,|z_G - z_{I_a}|$, adică: $GN_a = 2GI_a$.
□

Observaţia 185 *Analog, punctele N_b, G, I_b respectiv N_c, G, I_c sunt coliniare şi $GN_b = 2GI_b, GN_c = 2GI_c$.*

Teorema 186 *Triunghiul $N_aN_bN_c$ - având vârfurile în punctele adjuncte ale lui Nagel - şi triunghiul $\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c$ - având vârfurile în punctele adjuncte ale lui Gergonne - sunt omologice, centrul de omologie aparţinând dreptei $N\Gamma$ (unde N este punctul lui Nagel şi Γ este punctul lui Gergonne al triunghiului ABC).*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Gegonne". □

Teorema 187 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *Următoarea relaţie este adevărată:*

$$\cos\widehat{I_aON_a} = \frac{R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - \alpha}{(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}},$$

unde $\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$.

Demonstraţie. Aplicând relaţia lui Stewart în triunghiul I_aON_a, obţinem:

$$ON_a^2 \cdot GI_a + OI_a^2 \cdot N_aG - OG^2 \cdot N_aI_a = GI_a \cdot GN_a \cdot N_aI_a,$$

sau

$$ON_a^2 \cdot GI_a + OI_a^2 \cdot 2GI_a - OG^2 \cdot 3GI_a = 6GI_a^3,$$

relaţie echivalentă cu

$$ON_a^2 + 2 \cdot OI_a^2 - 3 \cdot OG_a^2 = 6GI_a^2.$$

Deoarece $N_aI_a = 3GI_a$ rezultă

$$\begin{aligned} I_aN_a^2 &= 9GI_a^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 8Rr_a + 4r_a^2\right) \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 12Rr_a + 6r_a^2 \\ &= 2\alpha + 12Rr_a + 6r_a^2. \end{aligned}$$

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul I_aON_a obţinem:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{I_aON_a} &= \frac{ON_a^2 + OI_a^2 - N_aI_a^2}{2ON_a \cdot OI_a} \\ &= \frac{R^2 + 2Rr_a + (R+2r_a)^2 - N_aI_a^2}{(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}} \\ &= \frac{R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - \alpha}{(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}}. \end{aligned}$$

Relaţii analoge se pot da pentru r_b şi r_c. □

Teorema 188 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] (*Forma duală a inegalităţii lui Blundon*) *Următoarele inegalităţi sunt adevărate:*

$$0 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4} \leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}. \qquad (*)$$

Demonstraţie. Inegalitatea din stânga este evidentă. Deoarece $-1 \leq \cos \widehat{I_aON_a} \leq 1$, rezultă

$$R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - (R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \leq \alpha \leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a},$$

unde $\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$. Inegalitatea din dreapta a rezultă imediat utilizând teorema precedentă. □

Observaţia 189 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *Notăm cu $\mathcal{T}(R, r_a)$ familia triunghiurilor având aceeaşi rază a cercului circumscris R şi aceeaşi exrază r_a. Inegalitatea (*) ne dă intervalul exact în care se "mişcă" α pentru toate triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$. Avem $\alpha_{min} = 0$ şi $\alpha_{max} = R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}$. Dacă fixăm punctele O şi I_a astfel încât $OI_a = \sqrt{R^2+2Rr_a}$, atunci triunghirile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$ ce au valoarea α minimă degenerează într-un punct şi se corespund punctelor*

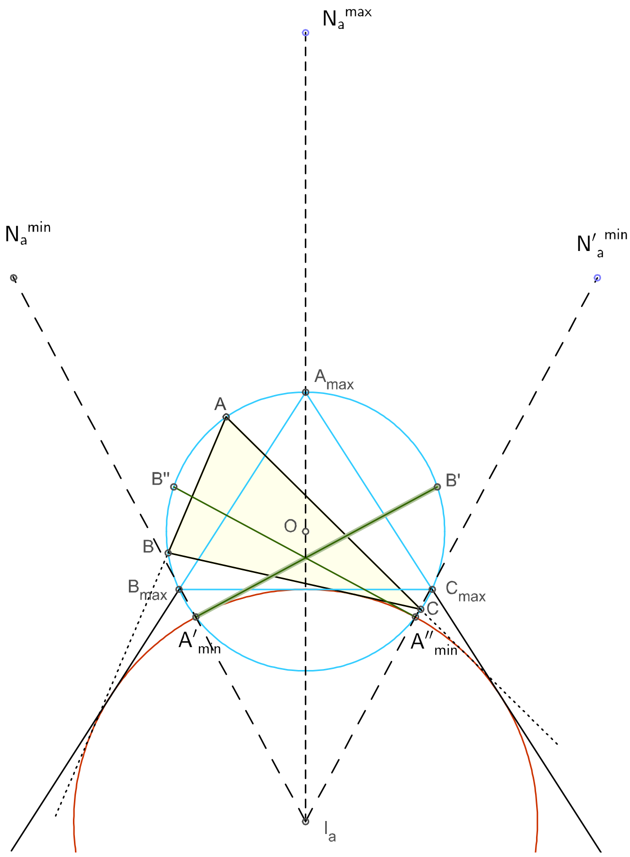

Figura 1.53: Forma duală a inegalităţii lui Blundon

de intersecţie dintre cercurile $\mathcal{C}(O;R)$ şi $\mathcal{C}(I_a;r_a)$. În Figura 1.53 aceste puncte sunt notate cu $A'_{\min}$ şi $A''_{\min}$. De asemenea, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R,r_a)$ pentru care valoarea lui α este maximă, corespunde cazului $\cos\widehat{I_aON_a}=-1$, ceea ce înseamnă că punctele I_a,O,N_a sunt coliniare, iar O este situat între I_a şi N_a. În Figura 1.53 acest triunghi este notat cu $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$. Utilizând dreapta lui Euler rezultă că triunghiul $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$ este isoscel. În concordanţa cu teorema de închidere exterioară a lui Poncelet, triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R,r_a)$ sunt "situate" între aceste două cazuri extreme.

Observaţia 190 *Din Teorema 188 rezultă o cale naturală de construcţie a unui triunghi ABC în care se dau centrul cercului exînscris I_a, centrul cercului circumscris O şi punctul lui Nagel adjunct N_a. Ţinând cont de faptul că punctele I_a,G,N_a sunt coliniare, găsim centrul de greutate G pe segmentul I_aN_a astfel încât $I_aG=\frac{1}{3}I_aN_a$. Apoi, utilizând faptul că punctele O,G,H sunt coliniare, determinăm ortocentrul H pe raza $(OG$ astfel încât $OH=3OG$. Am redus astfel construcţia cerută la faimoasa problemă a lui Euler de construcţie a unui triunghi în care ştim I, O şi H.*

Observaţia 191 *Din Teorema 188 apare întrebarea firească: care este expresia lui α*

în funcţie de p, R, r_a? *Pentru a răspunde la această întrebare vom arăta mai întâi că:*

$$ab + bc + ca = \frac{s^6 + r_a(4R + 3r_a)s^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)s^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(s^2 + r_a^2)^2.}$$

Deoarece $\tan \frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}$, *putem scrie*

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{\tan^2\frac{A}{2} + 1} = \frac{2\frac{r_a}{p}}{\frac{r_a^2}{p^2} + 1} = \frac{2r_a p}{r_a^2 + p^2}.$$

şi de aici

$$a = 2R \cdot \sin A = \frac{4r_a p}{r_a^2 + p^2}.$$

Dacă K *este aria triunghiului* ABC, *din* $\frac{abc}{4R} = K = (p-a)r_a$, *obţinem*

$$\begin{aligned} bc &= \frac{4(p-a)Rr_a}{a} = 4Rr_a \cdot \left(\frac{p}{a} - 1\right) \\ &= 4Rr_a \cdot \frac{r_a^2 + p^2 - 4Rr_a}{4Rr_a} = r_a^2 + p^2 - 4Rr_a. \end{aligned}$$

Combinând aceste rezultate rezultă

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= a(b+c) + bc = a(2p-a) + bc \\ &= \frac{4r_a p}{r_a^2 + p^2} \cdot \left(2p - \frac{4r_a s}{r_a^2 + s^2}\right) + r_a^2 + p^2 - 4Rr_a \\ &= \frac{p^6 + r_a(4R + 3r_a)p^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)p^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(p^2 + r_a^2)^2}. \end{aligned}$$

iar de aici obţinem

$$\begin{aligned} 4\alpha &= a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= 4p^2 - 2 \cdot \frac{p^6 + r_a(4R + 3r_a)p^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)p^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(p^2 + r_a^2)^2} \\ &= \frac{2[p^6 - r_a(4R - r_a)p^4 + r_a^2(16R^2 - r_a^2)p^2 - r_a^5(r_a - 4R)]}{(p^2 + r_a^2)^2}. \qquad (i) \end{aligned}$$

Formula (i) ne dă o expresie complicată a lui α *în funcţie de* p, R, r_a. *Din* $a^2+b^2+c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, *găsim* $p^2 = 2\alpha + 4Rr + r^2$, *de unde:*

$$\begin{aligned} \cos\widehat{ION} &= \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - p^2}{2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \\ &= \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\alpha - 4Rr - r^2}{2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \\ &= \frac{R^2 + 3Rr - r^2 - \alpha}{(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}. \qquad (ii) \end{aligned}$$

Consecinţa 192 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *În orice triunghi având semiperimetrul* p *următoarele inegalităţi au loc:*

$$-2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \le p^2-\left(2R^2+r^2+4Rr-6Rr_a-2r_a^2\right) \le 2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}. \tag{iii}$$

Demonstraţie. Deoarece $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr)$, din relaţia (ii) rezultă concluzia. Expresii similare se pot obţine pentru r_b şi r_c. □

Observaţia 193 *Utilizând faptul că* $r<r_a$ *şi inegalitatea din dreapta a relaţiei (iii) obţinem*

$$\begin{aligned} p^2 &\le 2R^2+r^2+4Rr-6Rr_a-2r_a^2+2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \\ &< 2R^2+r_a^2+4Rr_a-6Rr_a-2r_a^2+2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \\ &= 2R^2-2Rr_a-r_a^2+2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \end{aligned}$$

sau

$$p^2<2R^2-2Rr_a-r_a^2+2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}. \tag{iv}$$

Teorema 194 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *În orice triunghi având semiperimetrul* p *următoarele inegalităţi au loc:*

$$p^2<min\{4R^2+4Rr_a+3r_a^2, 4R^2+4Rr_b+3r_b^2, 4R^2+4Rr_c+3r_c^2\}. \tag{3.3.3}$$

Demonstraţie. Utilizând relaţia (iv) putem scrie

$$\begin{aligned} p^2 &< 2R^2-2Rr_a-r_a^2+2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \\ &< 2R^2-2Rr_a-r_a^2+2(R+2r_a)(R+r_a) \\ &= 4R^2+4Rr_a+3r_a^2. \end{aligned}$$

Expresii similare se pot obţine pentru r_b şi r_c. □

Consecinţa 195 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *În orice triunghi următoarele inegalităţi au loc:*

$$a^2+b^2+c^2<min\{8R^2+4r_a^2, 8R^2+4r_b^2, 8R^2+4r_c^2\}.$$

Demonstraţie. Din Teorema 188 obţinem

$$\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\le R^2-3Rr_a-r_a^2+(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}$$

$$<R^2-3Rr_a-r_a^2+(R+2r_a)(R+r_a)=2R^2+r_a^2,$$

de unde rezultă concluzia. Expresii similare se pot obţine pentru r_b şi r_c. □

Teorema 196 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *În orice triunghi este adevărată inegalitatea:*

$$p^2\le 2\sqrt{2}(2R+r_a)r_a$$

Demonstraţie. Avem

$$p^2 \le 4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2 = (2R + r_a)^2 + 2r_a^2 \le 2\sqrt{(2R + r_a)^2 \cdot 2r_a^2},$$

de unde rezultă concluzia. □

Observaţia 197 *Analog se obţin inegalităţile: i)* $p^2 \le 2\sqrt{2}(2R + r_b)r_b$ *şi ii)* $p^2 \le 2\sqrt{2}(2R + r_c)r_c$.

Teorema 198 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *În orice triunghi este adevărată inegalitatea:*

$$p^2 \le 2\sqrt{3}R(R + 2r_a).$$

Demonstraţie. Avem

$$p^2 \le 4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2 \le 4R^2 + 4Rr_a + 4r_a^2 = 3R^2 + (R + 2r_a)^2,$$

de unde

$$p^2 \le 3R^2 + (R + 2r_a)^2 \le 2\sqrt{3R^2 \cdot (R + 2r_a)^2} = 2\sqrt{3}(R^2 + 2Rr_a).$$

□

Analog se obţin inegalităţile: $p^2 \le 2\sqrt{3}R(R + 2r_b)$ şi $p^2 \le 2\sqrt{3}R(R + 2r_c)$.

Observaţia 199 *Deoarece* $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$*, inegalitatea din teorema precedentă poate fi rescrisă astfel:* $p^2 \le 2\sqrt{3}OI_a^2$ *sau* $p \le \sqrt[4]{12}OI_a$.

Teorema 200 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *În orice triunghi este adevărată inegalitatea:* $p \le 2 \cdot OI_a$.

Demonstraţie. Avem $p \le \sqrt[4]{12}OI_a \le 2OI_a$. □

Teorema 201 [*Andrica, D., Barbu, C.* [7]] *În orice triunghi este adevărată inegalitatea:*

$$p^2 \le \min\{12Rr_a, 12Rr_b, 12Rr_c\}.$$

Demonstraţie. Avem

$$p^2 \le 4(R^2 + Rr_a + r_a^2) \le 12\sqrt[3]{R^2 \cdot Rr_a \cdot r_a^2} = 12Rr_a$$

sau $p \le 2\sqrt{3Rr_a}$. □