1.9 PUNCTUL LUI SPIEKER

„Fie să-mi clipească vecinice, abstracte,
Din culoarea minţii, ca din prea vechi acte.
Eptagon cu vârfuri stelelor la fel.
Şapte semne, puse ciclic." – Ion Barbu[12]

Centrul cercului înscris în triunghiul median al unui triunghi ABC se numeşte ***punctul lui Spieker*** (S_p) al triunghiului ABC (Figura 1.56). Cercul înscris în triunghiul median se numeşte ***cercul lui Spieker***[13].

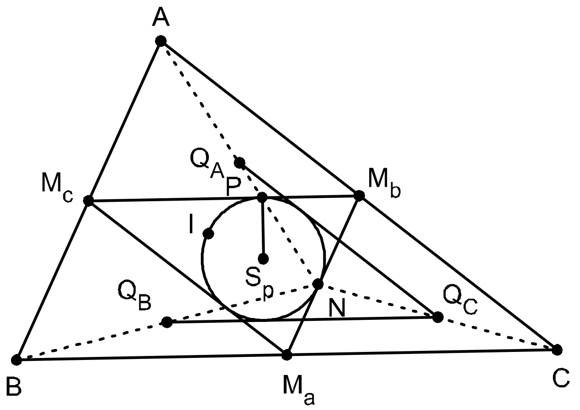

Figura 1.56: Punctul lui Spieker

Teorema 213 *Raza cercului lui Spieker* (r_s) *are lungimea jumătate din lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Semiperimetrul triunghiului median $M_aM_bM_c$ este $p' = \frac{p}{2}$, iar $A_{[M_aM_bM_c]} = \frac{1}{4}A_{[ABC]}$, de unde rezultă $r_s \cdot p' = \frac{1}{4} \cdot r \cdot p$, adică $r_s \cdot \frac{p}{2} = \frac{1}{4} \cdot rp$, deci $r_s = \frac{r}{2}$. □

Teorema 214 *Punctul lui Spieker aparţine dreptei lui Nagel.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel". □

Teorema 215 *Punctul lui Spieker, centrul cercului înscris în triunghiul median al triunghiului ABC, este mijlocul segmentului IN.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel". □

[12] Ion Barbu (1895-1961) – matematician român, profesor la Universitatea din Bucureşti, contribuţii în algebră şi geometrie

[13] Theodor Spieker (1828-1908) – matematician german, contribuţii în geometrie

Teorema 216 *Punctele I, G, S_p, N sunt coliniare şi $12GS_p = 6GI = 4IS_p = 3NG = 2NI$.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 217 *Pentru orice punct M din planul unui triunghi ABC este adevărată relaţia:*

$$\overrightarrow{MS_p} = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot (2p-a) + \overrightarrow{MB} \cdot (2p-b) + \overrightarrow{MC} \cdot (2p-c)}{4p}.$$

Demonstraţie. Din $\frac{GI}{S_pG} = 2$ rezultă că pentru orice punct M din planul triunghiului ABC este adevărată relaţia:

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MS_p}}{3}$$

sau

$$\overrightarrow{MS_p} = \frac{3\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MI}}{2} = \frac{3 \cdot \frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{3} - \frac{a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}{2p}}{2},$$

de unde rezultă concluzia (Figura 1.57). □

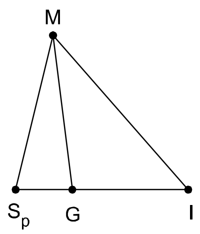

Figura 1.57: $\overrightarrow{MS_p}$

Teorema 218 *Coordonatele baricentrice absolute ale punctului lui Spieker sunt:*

$$S_p\left(\frac{2p-a}{4p}, \frac{2p-b}{4p}, \frac{2p-c}{4p}\right).$$

Demonstraţie. Vezi teorema precedentă. □

Teorema 219 *Afixul punctului lui Spieker al unui triunghi ABC este egal cu :*

$$z_{S_p} = \frac{z_A \cdot (2p-a) + z_B \cdot (2p-b) + z_C \cdot (2p-c)}{4p}.$$

Demonstraţie. Soluţie analoagă cu cea din teorema 217. □

Teorema 220 *Simetricul centrului cercului circumscris unui triunghi ABC faţă de punctul lui Spieker al triunghiului ABC este punctul lui Furhmann.*

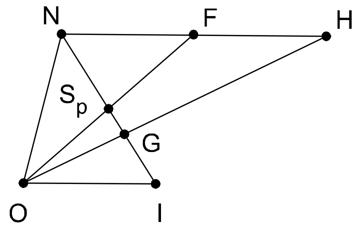

Figura 1.58: Simetricul lui O faţă de S_p

Demonstraţie. Considerăm un reper complex având originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 1.58). Atunci, $z_O = 0$,

$$z_F = \frac{z_A(2p-a) + z_B(2p-b) + z_C(2p-c)}{2p},$$

de unde rezultă că $\frac{z_F + z_O}{2} = z_{S_p}$. □

Teorema 221 *Fie Q_A, Q_B, Q_C mijloacele segmentelor AN, BN, respectiv CN (unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC). Triunghiul $Q_AQ_BQ_C$ este circumscris cercului Spieker al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 222 *Punctul lui Spieker al triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul său median $M_aM_bM_c$ şi al triunghiului $Q_AQ_BQ_C$ ale cărui vârfuri sunt mijloacele segmentelor AN, BN, respectiv CN (unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC).*

Demonstraţie. Vezi teorema 221. □

Teorema 223 *Punctele de contact dintre cercul lui Spieker şi laturile triunghiului $Q_AQ_BQ_C$ sunt mijloacele segmentelor NC_a, NC_b, NC_c, unde C_a, C_b, C_c sunt punctele de contact dintre cercul înscris în triunghiul ABC şi laturile acestuia, iar N punctul lui Nagel al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Prin omotetia de centru N şi raport $1/2$, punctul de contact dintre cercul lui Spieker şi latura Q_BQ_C se transformă în C_a, deci acest punct este mijlocul segmentului NC_a. □

Teorema 224 *Fie Q_A, Q_B, Q_C mijloacele segmentelor AN, BN respectiv CN (unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC). Triunghiurile median $M_aM_bM_c$ şi $Q_AQ_BQ_C$ sunt congruente.*

Demonstraţie. Deoarece $M_aM_b \equiv Q_AQ_B (= c/2)$, $M_bM_c \equiv Q_BQ_C (= a/2)$ şi $M_cM_a \equiv Q_CQ_A (= b/2)$, rezultă că triunghiurile $M_aM_bM_c$ şi $Q_AQ_BQ_C$ sunt congruente. □

Teorema 225 *Dreptele IH şi* S_pO *sunt paralele şi* $HI = 2S_pO$.

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Nagel”. □

Teorema 226 *Punctele de contact dintre cercul lui Spieker al triunghiului* ABC *cu laturile triunghiului median sunt intersecţiile acestor laturi cu* AN, BN, CN*, unde* N *este punctul Nagel al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Fie P punctul de tangenţă dintre latura M_bM_c cu cercul lui Spieker al triunghiului ABC şi $\{D\} = AN \cap BC$. Deoarece lungimile laturilor triunghiului median $M_aM_bM_c$ sunt $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$, iar P este un punct de contact al cercului înscris în triunghiul $M_aM_bM_c$, rezultă $M_cP = \frac{p-c}{2} = \frac{BD}{2}$ şi cum $M_cP \parallel BD$ rezultă $P \in BD$. □

Teorema 227 *Paralelele duse prin mijloacele* M_a, M_b, M_c *ale laturilor* BC, CA*, respectiv* AB *ale triunghiului* ABC *la bisectoarele interioare ale unghiurilor* A, B, C *sunt concurente în punctul lui Spieker al triunghiului* ABC.

Demonstraţie. Deoarece $M_aM_b \parallel AB, M_aM_c \parallel AC$, iar AI este bisectoarea un - ghiului A, rezultă că paralela prin M_a la AI este bisectoarea interioară a unghiului $M_cM_aM_b$. Analog se arată că paralelele considerate sunt bisectoarele interioare ale triunghiului median, deci concurente în punctul lui Spieker al triunghiului ABC. □

Teorema 228 *Mijlocul segmentului ce uneşte ortocentrele triunghiurilor median şi ortic ale unui triunghi ABC este punctul lui Spieker al triunghiului ortic al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Triunghiuri ortopolare”. □

Teorema 229 *Dreptele lui Simson ale punctelor de intersecţie cu bisectoarele exterioare ale unghiurilor unui triunghi ABC cu cercul circumscris triunghiului trec prin mijloacele laturilor triunghiului, sunt paralele cu bisectoarele interioare ale triunghiului şi sunt concurente în punctul lui Spieker al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Dreapta lui Simson”. □

Teorema 230 *Punctele lui Spieker Sp, lui Bevan V şi ortocentrul unui triunghi ABC sunt coliniare şi* $HS_p \equiv S_pV$.

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Bevan”. □

Teorema 231 *Centrul radical al cercurilor exînscrise unui triunghi este punctul lui Spieker corespunzător acelui triunghi.*

Demonstraţie. Vezi „Cercurile exînscrise”. □