1.10 PUNCTELE ADJUNCTE ALE LUI SPIEKER

„Nici un om nu se întăreşte citind un tratat de gimnastică, ci făcând exerciţii; nici un om nu se învaţă a judeca citind judecăţile scrise de alţii, ci judecând singur şi dându-şi singur seama de natura lucrurilor." – Mihai Eminescu[14]

Punctele adjuncte ale lui Spieker S_p^a, S_p^b, S_p^c ale unui triunghi ABC sunt centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului median $M_aM_bM_c$ al triunghiului ABC. $\Delta S_p^aS_p^bS_p^c$ se numeşte *triunghiul lui Spieker*. Am arătat în secţiunea precedentă că punctul lui Spieker S_p al triunghiului ABC aparţine dreptei lui Nagel corespunzătoare, fiind mijlocul segmentului IN. Vom da în continuare proprietăţi similare cu cele ale punctului lui Spieker, pentru punctele lui Spieker adjuncte (Figura 1.59). Fie N_a, N_b, N_c punctele adjuncte ale lui Nagel şi I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC.

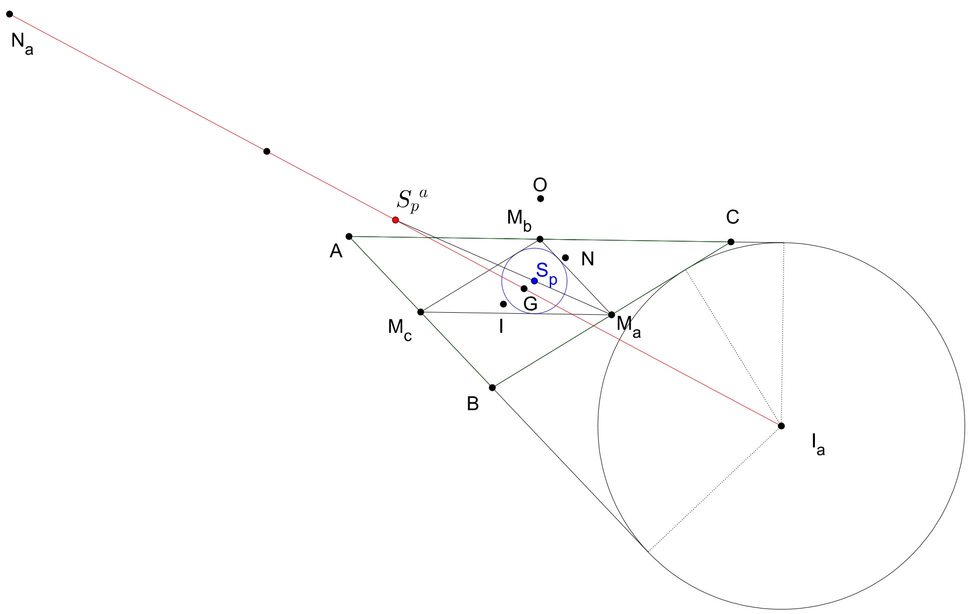

Figura 1.59: Punctul adjunct al lui Spieker S_p^a

Teorema 232 *Punctul adjunct al lui Spieker S_p^a al triunghiului ABC este mijlocul segmentului N_aI_a.*

Demonstraţie. *Soluţia* 1. Fie S_1, S_2, S_3 mijloacele segmentelor N_aI_a, N_bI_b, respectiv N_cI_c. Vom arăta că triunghiurile $S_1S_2S_3$.şi $M_aM_bM_c$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Spieker S_p al triunghiului. Deoarece $\widehat{AGI_a} \equiv \widehat{S_1GM_a}$ şi

[14]Mihai Eminescu (1850-1889) – poet, prozator şi jurnalist român, socotit de cititorii români şi de critica literară postumă drept cea mai importantă voce poetică din literatura română

$\frac{AG}{GM_a} = \frac{I_aG}{GS_1} = 2$, rezultă că triunghiurile AGI_a şi M_aGS_1 sunt asemenea (Figura 1.60), deci $AI_a \| SM_a$. Dar $AB \| M_aM_b, AC \| M_aM_c$ şi AI_a este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$,

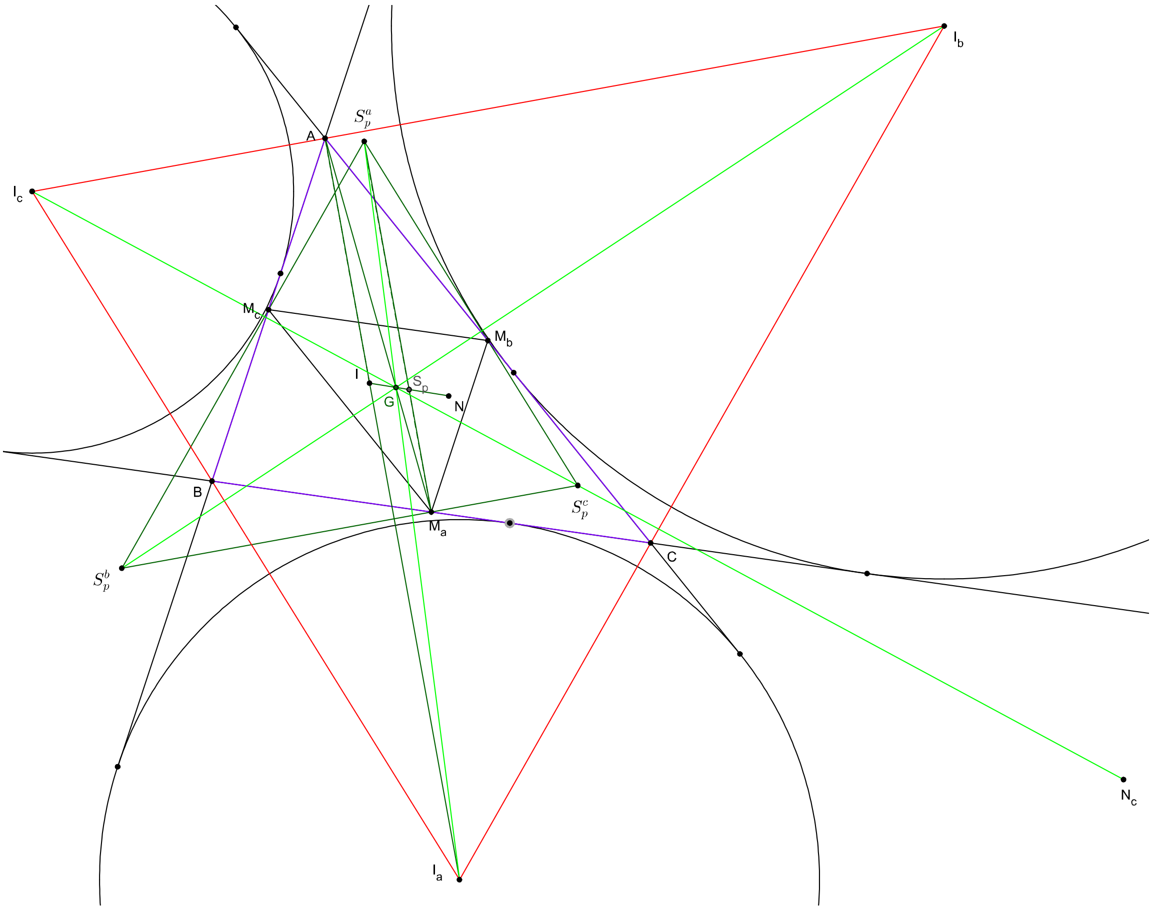

Figura 1.60: S_p^a este mijlocul segmentului N_aI_a

de unde rezultă că M_aS_1 este bisectoarea unghiului $\widehat{M_bM_aM_c}$. Obţinem că punctul lui Spieker S_p aparţine dreptei M_aS_1. Analog se arată că S_p este situat pe dreptele M_bS_2 şi M_cS_3. Deoarece

$$\frac{GI_a}{GS_1} = \frac{GI_b}{GS_2} = \frac{GI_c}{GS_3} = 2,$$

rezultă că $S_1S_2S_3$ este omotetic cu $I_aI_bI_c$ prin omotetia de centru G şi raţie -2. Cum I este ortocentrul triunghiului $I_aI_bI_c$ şi S_p este imaginea lui I prin această omotetie, rezultă că S_p este ortocentrul triunghiului $S_1S_2S_3$. Deoarece $M_aM_bM_c$ este triunghiul ortic al triunghiului $S_1S_2S_3$, rezultă că S_1, S_2, S_3 sunt centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului $M_aM_bM_c$, de unde rezultă concluzia

Soluţia 2. Fără a restrânge generalitatea presupunem că centrul cercului circumscris triunghiului ABC este originea planului complex. Notăm cu z_A, z_B, z_C afixele punctelor A, B, C. Avem:

$$z_{I_a} = \frac{-az_A + bz_B + cz_C}{2(s-a)} \quad \text{şi} \quad z_{N_a} = \frac{sz_A - (s-c)z_B - (s-b)z_C}{s-a}.$$

Dacă S este mijlocul segmentului I_aN_a, atunci

$$z_S = \frac{z_{N_a} + z_{I_a}}{2} = \frac{(b+c)z_A + (c-a)z_B + (b-a)z_C}{4(s-a)}. \tag{i}$$

Utilizând afixele punctelor M_a, M_b, M_c, rezultă:

$$\begin{aligned} z_{S_p^a} &= \frac{-\frac{a}{2}z_{M_a} + \frac{b}{2}z_{M_b} + \frac{c}{2}z_{M_c}}{2\left(\frac{s}{2} - \frac{a}{2}\right)} \\ &= \frac{(b+c)z_A + (c-a)z_B + (b-a)z_C}{4(s-a)}. \end{aligned} \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă concluzia. □

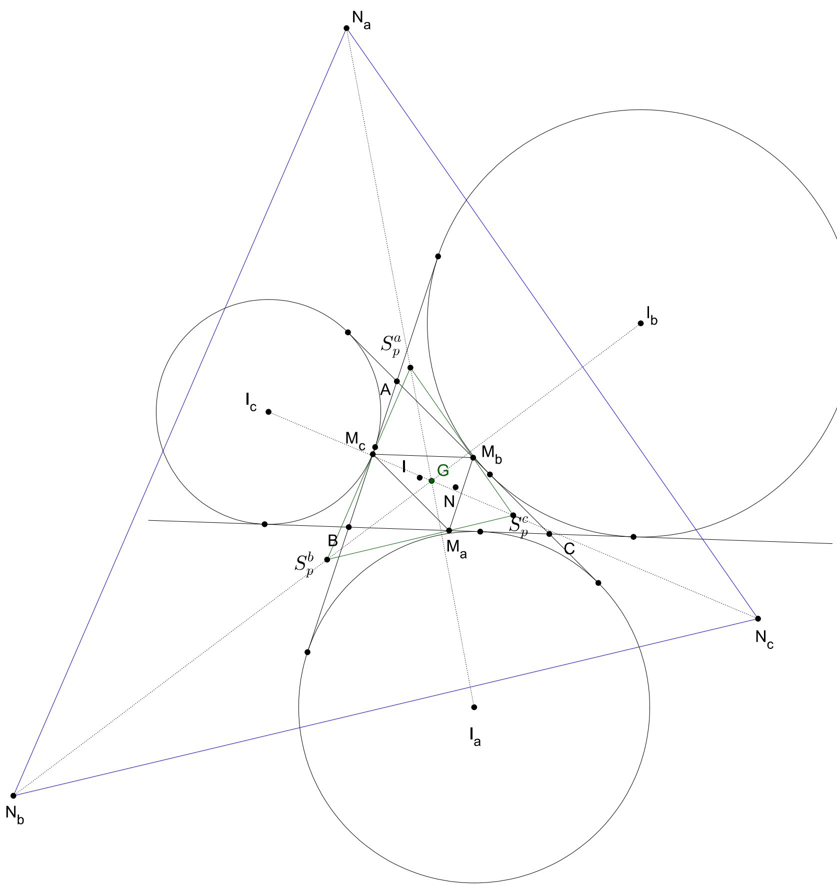

Figura 1.61: Triunghiul lui Spieker

Teorema 233 *Triunghiurile lui Spieker* $S_p^a S_p^b S_p^c$ *şi Nagel* $N_a N_b N_c$ *sunt omotetice prin omotetia de centru* G *şi raţie* 3.

Demonstraţie. Dreptele $S_p^a N_a, S_p^b N_b$ şi $S_p^c N_c$ sunt concurente în G (Figura 1.61) şi

$$\frac{GN_a}{GS_p^a} = \frac{GN_b}{GS_p^b} = \frac{GN_c}{GS_p^c} = 3.$$

□

Teorema 234 *Triunghiul lui Spieker* $S_p^a S_p^b S_p^c$ *este omotetic cu triunghiul* $I_a I_b I_c$ *prin omotetia de centru* G *şi raţie* -2.

Deoarece I este ortocentrul triunghiului $I_a I_b I_c$, obţinem următoarele consecinţe.

Consecinţa 235 *Punctul lui Spieker* S_p *este ortocentrul triunghiului* $S_p^a S_p^b S_p^c$.

Consecinţa 236 *Triunghiul median* $M_a M_b M_c$ *este triunghiul ortic al triunghiului* $S_p^a S_p^b S_p^c$*, iar punctele* M_a, M_b, M_c *aparţin laturilor triunghiului* $S_p^a S_p^b S_p^c$

Consecinţa 237 *Triunghiurile* $S_p^a S_p^b S_p^c$ *şi* $I_a I_b I_c$ *sunt ortologice,* I *şi* S_p *sunt centrele de ortologie.*

Consecinţa 238 *Triunghirile* $S_p^a S_p^b S_p^c$ *şi* $M_a M_b M_c$ *sunt omologice, centrul de omologie fiind* S_p.