1.11 PUNCTELE LUI BROCARD

„Imaginaţia este mai importantă decât cunoaşterea; cunoaşterea este limitată pe când imaginaţia îmbrăţişează întreaga lume." – A. Einstein[15]

Teorema 239 *În orice triunghi ABC există punctele Ω şi Ω' şi unghiurile ω şi ω' astfel încât $m(\widehat{BA\Omega}) = m(\widehat{CB\Omega}) = m(\widehat{AC\Omega}) = \omega$ şi $m(\widehat{AB\Omega'}) = m(\widehat{CB\Omega'}) = m(\widehat{CA\Omega'}) = \omega'$.*

Demonstraţie. Presupunând cunoscut unghiul ω trasăm semidreaptele $(A\Omega$ şi

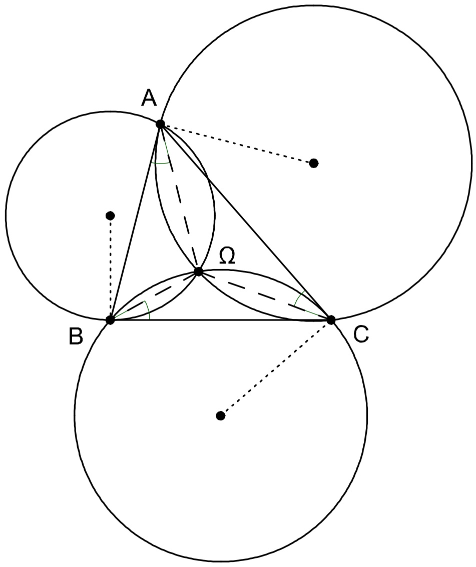

Figura 1.62: Punctele lui Brocard

$(B\Omega$, determinând punctul lor de intersecţie Ω. Fie C_1, C_2 şi C_3 cercurile circumscrise triunghiurilor $C\Omega A, A\Omega B$, respectiv $B\Omega C$. Dacă $\widehat{BA\Omega} \equiv \widehat{CB\Omega} \equiv \widehat{AC\Omega} \equiv \omega$, atunci cercul C_1 este tangent în A laAB, cercul C_2 este tangent în B la BC şi cercul C_3 este tangent în C la CA (Figura 1.62). Ţinând cont şi de faptul că C_1 trece şi prin C, C_2 trece şi prin A, C_3 trece şi prin B, rezultă că cercurile C_1,C_2 şi C_3 sunt determinate independent de ω. Fie Ω punctul comun cercurilor C_1 şi C_2. Din $\Omega \in C_1$ rezultă $\widehat{\Omega AB} \equiv \widehat{\Omega CA}$; din $\Omega \in C_2$ rezultă $\widehat{BA\Omega} \equiv \widehat{\Omega BC}$, de unde $\widehat{\Omega CA} \equiv \widehat{\Omega BC}$, adică cercul ce trece prin punctele B,Ω,C trecând prin B şi tangent în C la CA (datorită ultimei congruenţe), coincide cu C_3, deci $\Omega \in C_3$. Analog, considerând cercurile: C_1' ce trece prin A şi este tangent în C la BC, C_2' ce trece prin B şi este tangent în A la AC şi C_3' ce trece prin C şi este tangent în B la AB, vom determina punctul Ω'. $\square$

[15] Albert Einstein (1879-1955) – fizician german, profesor universitar la Berlin şi Princeton, laureat al Premiului Nobel

Observaţia 240

1) Punctele Ω şi Ω' se numesc ***primul***, respectiv ***al doilea punct al lui Brocard***[16].

2) Cercurile C_1,C_2,C_3 se numesc ***cercurile Brocard directe***.

3) Cercurile C_1',C_2',C_3' se numesc ***cercurile Brocard retrograde***.

4) Un cerc ce trece prin două vârfuri ale unui triunghi şi este tangent la una din laturile triunghiului se numeşte ***cerc adjunct***.

5) Fiecare triunghi are şase cercuri adjuncte.

6) Notăm cercul adjunct ce trece prin C şi este tangent în A la AB cu $\overline{CA}$. Atunci, cercurile adjuncte $\overline{CA}$,$\overline{AB}$,$\overline{BC}$ trec prin primul punct al lui Brocard (Ω), iar cercurile $\overline{BA}$,$\overline{CB}$,$\overline{AC}$ trec prin al doilea punct al lui Brocard (Ω').

Teorema 241 *Coordonatele unghiulare ale punctelor lui Brocard sunt:*

$$\Omega(180^\circ - m(\widehat{B}), 180^\circ - m(\widehat{C}), 180^\circ - m(\widehat{A})),$$
$$\Omega'(180^\circ - m(\widehat{A}), 180^\circ - m(\widehat{B}), 180^\circ - m(\widehat{C})).$$

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned} m(\widehat{A\Omega B}) &= 180^\circ - [m(\widehat{\Omega AB} + m(\widehat{\Omega BA})] \\ &= 180^\circ - [m(\widehat{\Omega BC}) + m(\widehat{\Omega BA}] = 180^\circ - m(\widehat{B}) \end{aligned}$$

şi analog,

$$m(\widehat{B\Omega C}) = 180^\circ - m(\widehat{C}) \text{ şi } m(\widehat{C\Omega A}) = 180^\circ - m(\widehat{A})$$

(Figura 1.63). Pentru punctul Ω' avem:

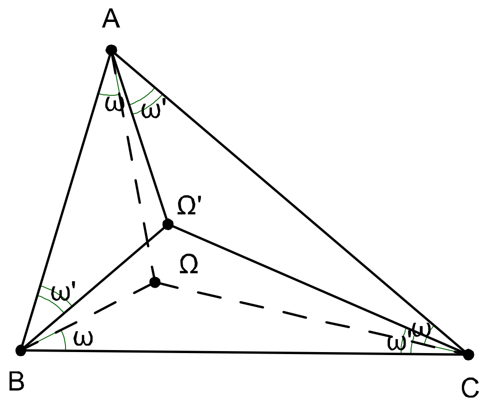

Figura 1.63: Coordonatele unghiulare ale punctelor lui Brocard

$$\begin{aligned} m(\widehat{A\Omega' B}) &= 180^\circ - [m(\widehat{\Omega' AB}) + m(\widehat{\Omega' BA})] \\ &= 180^\circ - [m(\widehat{\Omega' AB}) + m(\widehat{\Omega' AC})] = 180^\circ - m(\widehat{A}) \end{aligned}$$

şi analog $m(\widehat{B\Omega' C}) = 180^\circ - m(\widehat{B}), m(\widehat{C\Omega' A}) = 180^\circ - m(\widehat{C})$. □

[16] Henri Brocard (1845-1922) – matematician francez, contribuţii importante în geometrie

Observaţia 242 *Din cele de mai sus rezultă că* $m(\widehat{A\Omega B}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})$, $m(\widehat{B\Omega C}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$ *şi* $m(\widehat{C\Omega A}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$.

Teorema 243 *Dacă* Ω *este primul punct Brocard al triunghiului* ABC, *atunci distanţele* $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ *sunt proporţionale cu* $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, *respectiv* $\frac{a}{c}$ *(unde* a, b, c *sunt lungimile laturilor* BC, CA, *respectiv* AB*).*

Demonstraţie. Din teorema sinusurilor în triunghiul $A\Omega C$ rezultă:

$$\frac{A\Omega}{\sin\omega} = \frac{AC}{\sin(180° - A)},$$

de unde

$$A\Omega = b \cdot \frac{\sin\omega}{\sin A} = \frac{b}{a} \cdot 2R\sin\omega.$$

Analog, $B\Omega = \frac{c}{b} \cdot 2R\sin\omega$ şi $C\Omega = \frac{a}{c} \cdot 2R\sin\omega$, de unde

$$\frac{A\Omega}{b/a} = \frac{B\Omega}{c/b} = \frac{C\Omega}{a/c}.$$

□

Consecinţa 244 *Din egalităţile precedente rezultă:*

$$\frac{A\Omega}{B\Omega} = \frac{b^2}{ac}, \frac{B\Omega}{C\Omega} = \frac{c^2}{ba}, \frac{C\Omega}{A\Omega} = \frac{a^2}{cb}.$$

Teorema 245 *Dacă* Ω *este primul punct Brocard al triunghiului* ABC, *atunci*

$$A\Omega^2 + B\Omega^2 + C\Omega^2 = 4R^2\sin^2\omega\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right).$$

Demonstraţie. Vezi teorema precedentă. □

Teorema 246 *Dacă* Ω *este primul punct Brocard al triunghiului* ABC *şi* G *centrul său de greutate, atunci*

$$G\Omega^2 = \frac{4}{3}R^2\sin^2\omega\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Demonstraţie. Din teorema lui Leibniz şi teorema 245 rezultă concluzia. □

Teorema 247 *Distanţele de la primul punct Brocard al triunghiului la laturile* AB, BC, CA *sunt proporţionale cu numerele* $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$ *respectiv* $\frac{a}{c}$.

Demonstraţie. Fie x, y şi z distanţele de la Ω la laturile AB, BC, respectiv CA (Figura 1.64). Atunci,

$$x = A\Omega\sin\omega = \frac{b}{a} \cdot 2R\sin^2\omega$$

şi analog $y = \frac{c}{b} \cdot 2R\sin^2\omega$, $z = \frac{a}{c} \cdot 2R\sin^2\omega$. □

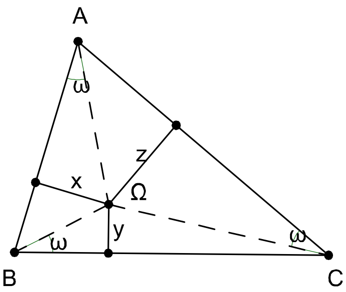

Figura 1.64: Distanţele de la Ω la laturile triunghiului

Teorema 248 *Distanţele de la cel de-al doilea punct Brocard Ω' al triunghiului ABC la vârfurile A, B, C sunt proporţionale cu $\frac{c}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b}{c}$.*

Demonstraţie. În triunghiul $AB\Omega'$ (Figura 1.65) teorema sinusurilor ne dă $A\Omega' = c \cdot \frac{\sin \omega'}{\sin A}$, adică $A\Omega' = \frac{c}{a} \cdot 2R \sin \omega'$. Analog, $B\Omega' = \frac{a}{b} \cdot 2R \sin \omega'$ şi $C\Omega' = \frac{b}{c} \cdot 2R \sin \omega'$. □

Consecinţa 249

$$\frac{A\Omega'}{B\Omega'} = \frac{bc}{a^2}, \frac{B\Omega'}{C\Omega'} = \frac{ca}{b^2}, \frac{C\Omega'}{A\Omega'} = \frac{ab}{c^2}.$$

Teorema 250 *Distanţele de la al doilea punct Brocard al triunghiului ABC la laturile AB, BC, CA sunt proporţionale cu $\frac{c}{a}, \frac{a}{b}$ respectiv $\frac{b}{c}$.*

Demonstraţie. Fie x', y', z' distanţele de la Ω' la laturile AB, BC, respectiv CA (Figura 1.65). Atunci, $x' = B\Omega' \sin \omega' = \frac{a}{b} \cdot 2R \sin^2 \omega'$, $y' = \frac{b}{c} \cdot 2R \sin^2 \omega'$ şi $z' = \frac{c}{a} \cdot 2R \sin^2 \omega'$. □

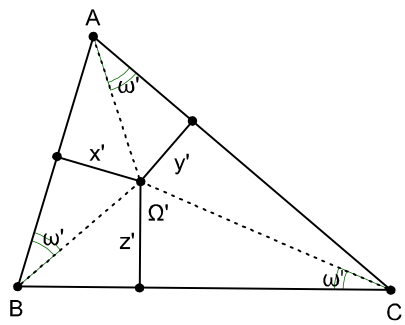

Figura 1.65: Distanţele de la Ω' la laturile triunghiului

Teorema 251 *Punctele lui Brocard sunt izogonal conjugate.*

Demonstraţie. Din teoremele 247 şi 250 rezultă $x \cdot x' = y \cdot y' = z \cdot z'^2 \cdot \sin^2 \omega \cdot \sin^2 \omega'$, ceea ce arată că punctele A şi Ω' sunt izogonale (vezi „Drepte izogonale”). □

Observaţia 252 *Din proprietatea precedentă rezultă că $\omega = \omega'$. Unghiul ω se numeşte **unghiul lui Brocard**.*

Teorema 253 *Dacă Ω şi Ω' sunt punctele lui Brocard ale triunghiului ABC, atunci $A\Omega \cdot B\Omega \cdot C\Omega = A\Omega' \cdot B\Omega' \cdot C\Omega'$.*

Demonstraţie. Din teoremele 243 şi 248 rezultă $A\Omega \cdot B\Omega \cdot C\Omega = A\Omega' \cdot B\Omega' \cdot C\Omega' = 8R^3 \sin^3 \omega$. □

Teorema 254 *Triunghiurile podare ale punctelor lui Brocard Ω şi Ω' ale triunghiului ABC sunt congruente.*

Demonstraţie. Fie $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ şi $\Omega_1'\Omega_2'\Omega_3'$ triunghiurile podare ale punctelor lui

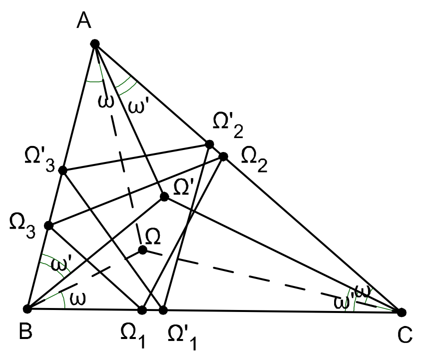

Figura 1.66: Triunghiurile podare ale punctelor lui Brocard

Brocard (Figura 1.66). Deoarece patrulaterul $\Omega\Omega_1C\Omega_2$ este inscriptibil, din teorema sinusurilor rezultă

$$\Omega_1\Omega_2 = C\Omega \sin C = a \sin \omega.$$

Analog, $\Omega_2\Omega_3 = b \sin \omega$ şi $\Omega_3\Omega_1 = c \sin \omega$. Analog, $\Omega_1'\Omega_2' = b \sin \omega$,$\Omega_2'\Omega_3' = c \sin \omega$ şi $\Omega_3'\Omega_1' = a \sin \omega$. Deci, triunghiurile $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ şi $\Omega_1'\Omega_2'\Omega_3'$ sunt congruente. □

Teorema 255 *Triunghiurile podare ale punctelor lui Brocard al triunghiului ABC sunt asemenea cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Din proprietatea 241 avem $m(\widehat{B\Omega C}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$ (Figura 1.66). Deoarece patrulaterele $B\Omega_1\Omega\Omega_3$ şi $C\Omega_2\Omega\Omega_1$ sunt inscriptibile, rezultă $\widehat{\Omega_3 B\Omega} \equiv \widehat{\Omega_3\Omega_1\Omega}$ (i) şi $\widehat{\Omega C\Omega_2} \equiv \widehat{\Omega\Omega_1\Omega_2}$ (ii). Dar $\widehat{\Omega B\Omega_1} \equiv \widehat{\Omega C\Omega_2}$, deci

$$\begin{aligned} m(\widehat{\Omega_3\Omega_1\Omega_2}) &= m(\widehat{\Omega_3\Omega_1\Omega}) + m(\widehat{\Omega\Omega_1\Omega_2}) \\ &= m(\widehat{\Omega B\Omega_3}) + m(\widehat{\Omega B\Omega_1}) = m(\widehat{ABC}). \end{aligned}$$

Analog, $\widehat{\Omega_1\Omega_2\Omega_3} \equiv \widehat{BCA}$, deci triunghiurile $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ şi BCA sunt asemenea. Analog se arată că $\Omega_1'\Omega_2'\Omega_3'$, triunghiul podar al lui Ω', este asemenea cu triunghiul CAB. □

Teorema 256 *Dacă* $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ *şi* $\Omega_1'\Omega_2'\Omega_3'$ *sunt triunghiurile podare ale punctelor lui Brocard, atunci*

$$A_{[\Omega_1\Omega_2\Omega_3]} = A_{[\Omega_1'\Omega_2'\Omega_3']} = \sin^2\omega \cdot A_{[ABC]}.$$

Demonstraţie. Din asemănarea triunghiurilor $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ şi BCA rezultă $\frac{A_{[\Omega_1\Omega_2\Omega_3]}}{A_{[ABC]}} = \left(\frac{\Omega_1\Omega_2}{BC}\right)^2 = \sin^2\omega$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 257 *Triunghiurile podare ale punctelor lui Brocard* Ω *şi* Ω' *ale triunghiului* ABC *sunt înscrise în acelaşi cerc Tücker având centrul în mijlocul segmentului* $\Omega\Omega'$.

Demonstraţie. Deoarece punctele Ω şi Ω' sunt izogonale atunci triunghiurile podare - $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ şi $\Omega_1'\Omega_2'\Omega_3'$ - ale punctelor lui Brocard au vârfurile pe acelaşi cerc cu centrul în mijlocul segmentului $\Omega\Omega'$ (vezi „Drepte izogonale"). Deoarece $m(\widehat{\Omega_2'\Omega_1'\Omega_3'}) = m(\widehat{ACB})$ şi

$$m(\widehat{\Omega_3'\Omega_1'\Omega_2'}) = m(\widehat{\Omega_3'\Omega_2\Omega_2'}) = \frac{1}{2}m(\widehat{\Omega_3'\Omega_2'})$$

rezultă $\widehat{\Omega_3'\Omega_2\Omega_2'} \equiv \widehat{ACB}$, deci $\Omega_3'\Omega_2 \parallel BC$. Atunci, $\frac{A\Omega_3}{A\Omega_2} = \frac{AB}{AC}$ sau

$$\frac{A\Omega'\cos(A-\omega)}{A\Omega\cos(A-\omega)} = \frac{AB}{AC},$$

deci $\frac{A\Omega'}{A\Omega} = \frac{AB}{AC}$. Deoarece $m(\widehat{\Omega_2'\Omega_3\Omega_3'}) = m(\widehat{\Omega_3'\Omega_1'\Omega_2'}) = m(\widehat{ACB})$, rezultă că dreapta $\Omega_2'\Omega_3$ este antiparalelă cu BC, adică

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A\Omega_2'}{A\Omega_3} = \frac{A\Omega'\cos\omega}{A\Omega\cos\omega} = \frac{A\Omega'}{A\Omega},$$

de unde rezultă concluzia. □

Teorema 258 *Raza cercului circumscris triunghiurilor podare ale punctelor lui Brocard au lungimea egală cu* $R\sin\omega$ (*unde* R *este raza cercului circumscris triunghiului* ABC).

Demonstraţie. Din asemănarea triunghiurilor BCA şi $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ rezultă: $\frac{R'}{R} = \frac{\Omega_1\Omega_2}{a} = \frac{a\sin\omega}{a}$, de unde rezultă că $R' = R\sin\omega$. □

Teorema 259 *Dacă* $\Omega_a\Omega_b\Omega_c$ *este triunghiul pedal al primului punct al lui Brocard* Ω *corespunzător unui triunghi* ABC, $\Omega_a \in (BC)$, $\Omega_b \in (CA)$, $\Omega_c \in (AB)$, *atunci*

$$\frac{B\Omega_a}{\Omega_a C} = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \frac{C\Omega_b}{A\Omega_b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ şi } \frac{A\Omega_c}{B\Omega_c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Demonstraţie. Teorema sinusurilor aplicată triunghiurilor $AB\Omega_a$ şi $AC\Omega_a$ (Figura 1.67) ne dă:

$$\frac{AB}{\sin\widehat{A\Omega_a B}} = \frac{B\Omega_a}{\sin\omega}$$

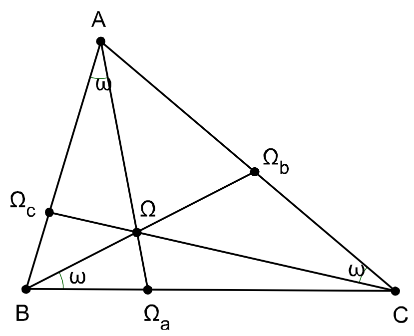

Figura 1.67: Triunghiul pedal al primului punct al lui Brocard

şi

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - \widehat{A\Omega_a B})} = \frac{\Omega_a C}{\sin(\widehat{A} - \omega)},$$

de unde

$$\frac{B\Omega_a}{\Omega_a C} = \frac{\sin\omega}{\sin(\widehat{A} - \omega)} \cdot \frac{c}{b} \tag{i}$$

Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul $A\Omega B$ dă: $\frac{A\Omega}{\sin\omega} = \frac{C\Omega}{\sin(\widehat{A}-\omega)}$, de unde

$$\frac{\sin\omega}{\sin(A-\omega)} = \frac{A\Omega}{C\Omega} = \frac{bc}{a^2} \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) obţinem $\frac{B\Omega_a}{C\Omega_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$. Analog se arată şi relaţiile: $\frac{C\Omega_b}{A\Omega_b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, $\frac{A\Omega_c}{B\Omega_c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$. □

Teorema 260 *Dacă $\Omega_a\Omega_b\Omega_c$ este triunghiul pedal al primului punct al lui Brocard Ω corespunzător unui triunghi ABC, atunci*

$$B\Omega_a = \frac{ac^2}{c^2+a^2}, C\Omega_a = \frac{a^3}{c^2+a^2}.$$

Demonstraţie. Din relaţia $\frac{B\Omega_a}{C\Omega_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$ prin proporţii derivate rezultă concluzia. □

Teorema 261 *Dacă $\Omega'_a\Omega'_b\Omega'_c$ este triunghiul pedal al celui de-al doilea punct Brocard, $\Omega'_a \in (BC)$, $\Omega'_b \in (CA)$, $\Omega'_c \in (AB)$, atunci*

$$\frac{B\Omega'_a}{\Omega'_a C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2, \frac{C\Omega'_b}{\Omega'_b A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \frac{A\Omega'_c}{\Omega'_c B} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Demonstraţie. Se procedează analog ca în teorema 259. □

Teorema 262 *Triunghiul circumpedal al unui punct al lui Brocard al triunghiului ABC este congruent cu triunghiul ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Triunghiul circumpedal". □

Teorema 263 *Fie $K_aK_bK_c$ triunghiul pedal al punctului lui Lemoine al triunghiului ABC şi punctele $\Omega_a,\Omega_a^{'} \in (BC)$; $\Omega_b,\Omega_b^{'} \in (CA)$; $\Omega_c,\Omega_c^{'} \in (AB)$ astfel încât $K_a\Omega_b^{'} \parallel AB$, $K_a\Omega_c \parallel AC$, $K_b\Omega_a \parallel BA$, $K_b\Omega_c^{'} \parallel BC$, $K_c\Omega_b \parallel BC$ şi $K_c\Omega_a^{'} \parallel AC$. Dreptele $A\Omega_a,B\Omega_b,C\Omega_c$ sunt concurente în primul punct Brocard Ω, iar $A\Omega_a^{'},B\Omega_b^{'},C\Omega_c^{'}$ sunt concurente în cel de-al doilea punct Brocard Ω'.*

Demonstraţie. Din teorema lui Steiner avem: $\frac{BK_a}{K_aC} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$ şi analoagele (Figura 1.68). Din teorema lui Thales avem $\frac{BK_a}{K_aC} = \frac{B\Omega_c}{\Omega_cA} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$şi analoagele. Din reciproca

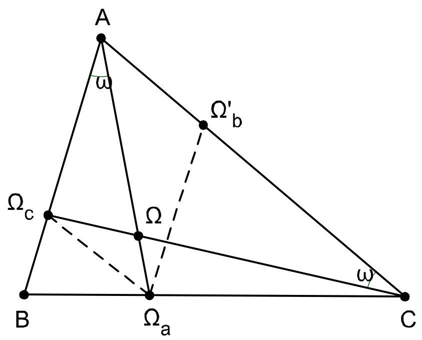

Figura 1.68: Drepte concurente în punctele lui Brocard

teoremei lui Ceva rezultă:

$$\frac{B\Omega_a}{\Omega_aC} \cdot \frac{C\Omega_b}{\Omega_bA} \cdot \frac{A\Omega_c}{\Omega_cB} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

deci dreptele $A\Omega_a$, $B\Omega_b$, $C\Omega_c$ sunt concurente. Dacă $\{\omega_a\} = A\Omega \cap BC$, atunci - conform aplicaţiei precedente -

$$\frac{B\omega_a}{\omega_aC} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{B\Omega_a}{\Omega_aC}$$

şi de aici rezultă

$$\frac{B\omega_a + \omega_aC}{\omega_aC} = \frac{B\Omega_a + \Omega_aC}{\Omega_aC},$$

adică $\frac{BC}{\omega_aC} = \frac{BC}{\Omega_aC}$, de unde $\omega_aC = \Omega_aC$, ceea ce arată că $\omega_a = \Omega_a$. Atunci, punctul de concurenţă al dreptelor $A\Omega_a,B\Omega_b,C\Omega_c$ este Ω. Analog se arată că dreptele $A\Omega_a^{'},B\Omega_b^{'},C\Omega_c^{'}$ sunt concurente în cel de-al doilea punct Brocard. □

Teorema 264 *Dacă ω este unghiul lui Brocard al triunghiului ABC, atunci*

$$ctg\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4A_{[ABC]}}.$$

Demonstraţie. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile $A\Omega B$ şi $A\Omega C$ ne dă:

$$\frac{B\Omega}{\sin\omega}=\frac{c}{\sin B}=\frac{A\Omega}{\sin(B-\omega)} \text{ şi } \frac{A\Omega}{\sin\omega}=\frac{b}{\sin(180^\circ-A)}$$

de unde $\frac{A\Omega}{B\Omega}=\frac{\sin(B-\omega)}{\sin\omega}=\frac{b\sin B}{c\sin A}$; din relaţia precedentă, dezvoltând $\sin(B-\omega)$, obţinem

$$ctg\omega-ctgB=\frac{\sin B}{\sin A\cdot\sin B}=ctgA+ctgC$$

şi ţinând seama de egalitatea $ctgA+ctgB+ctgC=\frac{a^2+b^2+c^2}{4A_{[ABC]}}$ rezultă concluzia. □

Observaţia 265 *Din cele de mai sus rezultă:* $ctg\omega=ctgA+ctgB+ctgC$.

Teorema 266 *Dacă ω este unghiul lui Brocard al triunghiului ABC, atunci*

$$\frac{\sin(A-\omega)}{a^2}=\frac{\sin(B-\omega)}{b^2}=\frac{\sin(C-\omega)}{c^2}=\frac{\sin\omega}{abc}.$$

Demonstraţie. Avem: $\frac{\sin(A-\omega)}{\sin\omega}=\frac{C\Omega}{A\Omega}=\frac{(a/c)2R\sin\omega}{(b/a)2R\sin\omega}=\frac{a^2}{bc}=\frac{a^3}{abc}$ şi relaţiile analoage. □

Teorema 267 *Dacă ω este unghiul lui Brocard al triunghiului ABC, atunci*

$$\frac{\sin(A+\omega)}{\sin\omega}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b},\ \frac{\sin(B+\omega)}{\sin\omega}=\frac{c}{a}+\frac{a}{c},\ \frac{\sin(C+\omega)}{\sin\omega}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(A+\omega)}{\sin\omega} &= \frac{\sin A\cos\omega+\sin\omega\cos A}{\sin\omega}=\sin A ctg\omega+\cos A\\ &= \frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{4A_{[ABC]}}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}. \qquad (\square)\end{aligned}$$

Teorema 268 *Unghiul lui Brocard ω are măsura mai mică sau egală cu 30°, egalitatea având loc pentru un triunghi echilateral.*

Demonstraţie. Inegalitatea $m(\omega)\le 30^\circ$ este echivalentă cu $ctg\omega\ge\sqrt{3}$, sau

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4\cdot A_{[ABC]}}\ge\sqrt{3},$$

de unde $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}A_{[ABC]}$ şi de aici rezultă

$$(a^2+b^2+c^2)\ge 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

p fiind semiperimetrul triunghiului ABC. Ridicând la pătrat inegalitatea precedentă obţinem:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,$$

adică, inegalitatea evidentă:

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0,$$

cu egalitate pentru $a^2 = b^2 = c^2$, adică $a = b = c$, deci când triunghiul ABC este echilateral. $\square$

Teorema 269 *În orice triunghi* $\sin\omega \leq \frac{1}{2}$.

Demonstraţie. Avem: $A_{[ABC]} = A_{[A\Omega' B]} + A_{[A\Omega' B]} + A_{[A\Omega' B]}$ relaţie echivalentă cu:

$$2A_{[ABC]} = c \cdot \Omega' A \cdot \sin\omega + a \cdot \Omega' B \cdot \sin\omega + b \cdot \Omega' C \cdot \sin\omega,$$

deci

$$\frac{4A^2_{[ABC]}}{\sin^2\omega} = (c\Omega' A + a\Omega' B + b\Omega')^2, \tag{i}$$

iar din inegalitatea lui Cauchy − Bouniakowski - Schwarz rezultă

$$(c\Omega' A + a\Omega' B + b\Omega')^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(\Omega'^2 + \Omega'^2 + \Omega'^2). \tag{ii}$$

Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă $\frac{4A^2_{[ABC]}}{\sin^2\omega} < (a^2 + b^2 + c^2)(\Omega'^2 + \Omega'^2 + \Omega'^2)$ (iii). Aplicând teorema cosinusului în triunghiurile $A\Omega' B, B\Omega' C$, respectiv $C\Omega' A$ rezultă:

$$\begin{aligned} \Omega'^2 &= \Omega'^2 + c^2 - 2c \cdot \Omega' A \cos\omega, & \text{(iv)} \\ \Omega'^2 &= \Omega'^2 + b^2 - 2b \cdot \Omega' C \cos\omega, \\ \Omega'^2 &= \Omega'^2 + a^2 - 2a \cdot \Omega' B \cos\omega. \end{aligned}$$

Adunând relaţiile (iv) şi ridicând la pătrat relaţia obţinută, se obţine:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{4\cos^2\omega} = (c\Omega' A + b\Omega' C + a\Omega' B)^2$$

şi conform relaţiei (ii) rezultă

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{4\cos^2\omega} \leq (a^2 + b^2 + c^2)(\Omega'^2 + \Omega'^2 + \Omega'^2). \tag{v}$$

Din inegalităţile (iii) şi (iv) prin înmulţire se obţine:

$$\frac{4A^2_{[ABC]}}{\sin^2(2\omega)} \leq (\Omega'^2 + \Omega'^2 + \Omega'^2)^2. \tag{vi}$$

Conform observaţiei precedente rezultă $0 < 2\omega \leq \frac{\pi}{3}$, deci $\sin^2(2\omega) \leq \frac{3}{4}$ (vii). Din relaţiile (vi) şi (vii) rezultă $A\Omega'^2 + B\Omega'^2 + C\Omega'^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}} A_{[ABC]}$, cu egalitate pentru triunghiul echilateral. $\square$

Teorema 270 *În orice triunghi ABC este adevărată relaţia:*

$$A\Omega'^2 + B\Omega'^2 + C\Omega'^2 \le R^2\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right).$$

Demonstraţie. Conform teoremei 248 avem: $A\Omega' = 2R\frac{b}{a}\sin\omega$, $B\Omega' = 2R\frac{c}{b}\sin\omega$ şi $C\Omega' = 2R\frac{a}{c}\sin\omega$. Atunci:

$$A\Omega'^2 + B\Omega'^2 + C\Omega'^2 = 4R^2 \cdot \sin^2\omega \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right)$$

şi utilizând proprietatea $\left(\sin\omega \le \frac{1}{2}\right)$ rezultă

$$A\Omega'^2 + B\Omega'^2 + C\Omega'^2 \le R^2\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right)$$

(cu egalitate când triunghiul ABC este echilateral). □

Teorema 271 *În orice triunghi ABC este adevărată relaţia:*

$$\frac{4\sqrt{3}A_{[ABC]}}{3} \le R^2\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right).$$

Demonstraţie. Vezi teorema precedentă. □

Teorema 272 *Într-un triunghi isoscel, mediana şi simediana unghiurilor congruente se intersectează într-un punct al lui Brocard.*

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC ($AB \equiv AC$), BB' simediana unghiului B şi

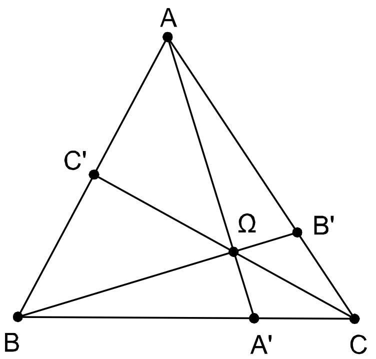

Figura 1.69: Ω aparţine unei mediane într-un triunghi isoscel

CC' mediana ce pleacă din C. Fie $\{\Omega\} = BB' \cap CC'$ şi $\{A'\} = A\Omega \cap BC$ (Figura 1.69). Deoarece CC' este mediană, BB' simediana şi $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$, rezultă $\widehat{\Omega CA} \equiv \widehat{\Omega BC}$ şi $\widehat{\Omega BA} \equiv \widehat{\Omega CB}$. Din teorema lui Ceva, aplicată în triunghiul ABC rezultă

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

de unde $\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'A}{B'C}$ şi din reciproca teoremei lui Thales rezultă $A'B' \parallel AB$. Atunci, $\widehat{B'A'A} \equiv \widehat{BAA'}$ şi $\widehat{ABB'} \equiv \widehat{BB'A'}$, deci $\widehat{\Omega B'A'} \equiv \widehat{\Omega CA'}$, adică patrulaterul $\Omega B'CA'$ este inscriptibil. Atunci $\widehat{\Omega A'B'} \equiv \widehat{\Omega CA}$, de unde $\widehat{AC\Omega} \equiv \widehat{\Omega AB} \equiv \widehat{\Omega BC}$, adică Ω este un punct Brocard al triunghiului ABC. □

Observaţia 273 *Analog se arată că mediana unghiului B şi simediana unghiului C se intersectează în celălalt punct Brocard.*

Teorema 274 *Dacă mediana şi simediana a doua unghiuri ale unui triunghi se intersectează într-unul din punctele lui Brocard ale triunghiului, atunci triunghiul este isoscel.*

Demonstraţie. Fie Ω primul punct al lui Brocard, deci $\widehat{\Omega AB} \equiv \widehat{\Omega BC} \equiv \widehat{\Omega CA}$. Fie BB' simediană şi CC' mediană, iar $\{A'\} = A\Omega \cap BC$. Din teorema lui Ceva rezultă $A'B' \parallel AB$, deci $\widehat{BAA'} \equiv \widehat{AA'B'}$ şi $\widehat{ABB'} \equiv \widehat{BB'A'}$. Atunci, $\widehat{\Omega A'B'} \equiv \widehat{\Omega CB'}$, deci patrulaterul $\Omega A'CB'$ este inscriptibil de unde $\widehat{\Omega CA'} \equiv \widehat{\Omega B'A'} \equiv \widehat{B'BA}$.. Astfel,

$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{ABB'}) + m(\widehat{B'BC}) = m(\widehat{C'CB}) + m(\widehat{C'CA}) = m(\widehat{C}),$$

deci triunghiul ABC este isoscel. □

Teorema 275 *Triunghiul $O\Omega\Omega'$ este isoscel, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar Ω şi Ω' punctele lui Brocard ale acestuia.*

Demonstraţie. Prin rotaţia de centru Ω şi unghi $90° - \omega$ (în sens negativ)

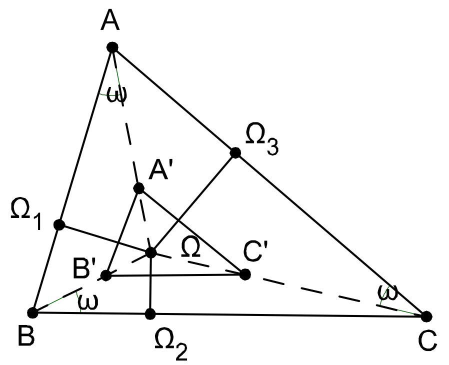

Figura 1.70: Triunghiul $O\Omega\Omega'$ este isoscel

triunghiul $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ se transformă în triunghiul $B'A'C'$ ($B' \in B\Omega, A' \in A\Omega, C' \in C\Omega$). Evident, triunghiurile $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ şi $B'A'C'$ sunt congruente (Figura 1.70). Deoarece

$$\frac{B'\Omega}{B\Omega} = \frac{\Omega\Omega'}{B\Omega} = \sin\omega = \frac{C'\Omega}{C\Omega}$$

rezultă $B'C' \parallel BC$. Analog, $A'C' \parallel AC$ şi $A'B' \parallel AB$. Centrul cercului circumscris (O_1) al triunghiului $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ se transformă prin rotaţia dată în O_1' - centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, deci $m(\widehat{O_1\Omega O_1'}) = 90° - \omega$. Deoarece triunghiurile $A'B'C'$ şi ABC sunt omotetice, rezultă că $O_1' \in (\Omega O$, deci $m(\widehat{O_1\Omega O}) = 90° - \omega$. Printr-o rotaţie de centru Ω' şi unghi $90° - \omega$ în sens trigonometric se arată, procedând ca mai sus, că $m(\widehat{O_1\Omega' O}) = 90° - \omega$,deci triunghiul $O\Omega\Omega'$ este isoscel. □

Observaţia 276 *Din proprietatea precedentă rezultă:* $m(\widehat{\Omega O\Omega'}) = 180° - 2(90° - \omega)$, *adică* $m(\widehat{\Omega O\Omega'}) = 2\omega$.

Teorema 277 *Dacă Ω şi Ω' sunt punctele lui Brocard, atunci*

$$O\Omega = O\Omega' = R\sqrt{1 - 4\sin^2\omega}.$$

Demonstraţie. Avem, $m(\widehat{\Omega B_1 C}) = m(\widehat{A})$, $2\cdot A_{[\Omega_1\Omega_2\Omega_3]} = \Omega_1\Omega_2\cdot\Omega_1\Omega_3\cdot\sin\widehat{\Omega_2\Omega_1\Omega_3} = (C\Omega\sin C)\cdot(\Omega B\cdot\sin B)\cdot\sin\widehat{\Omega_2\Omega_1\Omega_3}$ (i) şi

$$\begin{aligned} m(\widehat{\Omega_2\Omega_1\Omega_3}) &= m(\widehat{\Omega_2\Omega_1\Omega}) + m(\widehat{\Omega\Omega_1\Omega_3}) = m(\widehat{ABB_1}) + m(\widehat{\Omega C\Omega_2}) \\ &= m(\widehat{ACB_1}) + m(\widehat{\Omega C\Omega_2}) = m(\widehat{\Omega CB_1}). \end{aligned}$$

Teorema sinusurilor în triunghiul ΩCB_1 dă $\Omega C\sin\widehat{\Omega_2\Omega_1\Omega_3} = \Omega B_1\sin A$ (ii) (Figura 1.71). Din relaţiile (i) şi (ii) şi ţinând cont de puterea punctului Ω faţă de cercul

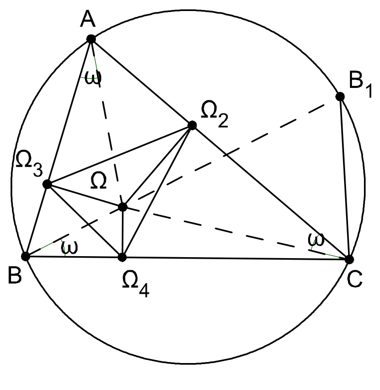

Figura 1.71: $O\Omega = O\Omega' = R\sqrt{1 - 4\sin^2\omega}$

circumscris triunghiului ABC rezultă:

$$\begin{aligned} 2\cdot A_{[\Omega_1\Omega_2\Omega_3]} &= \Omega B\cdot\Omega B_1\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \\ &= (R^2 - \Omega O^2)\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C. \qquad \text{(iii)} \end{aligned}$$

Conform teoremei 256 avem $A_{[\Omega_1\Omega_2\Omega_3]} = A_{[ABC]}\cdot\sin^2\omega$ (iv) şi

$$A_{[ABC]} = 2R^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C. \qquad \text{(v)}$$

Din relaţiile (iii), (iv) şi (v) rezultă $O\Omega^2 = R^2(1-4\sin^2\omega)$, de unde $O\Omega = R\sqrt{1 - 4\sin^2\omega}$, iar din $\Omega O \equiv \Omega' O$ obţinem concluzia. □

Teorema 278 *Dacă Ω şi Ω' sunt punctele lui Brocard, atunci*

$$\Omega\Omega' = 2R\sin\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}.$$

Demonstraţie. Deoarece triunghiul $O\Omega\Omega'$ este isoscel (Figura 1.72) şi $m(\widehat{\Omega O\Omega'}) =$

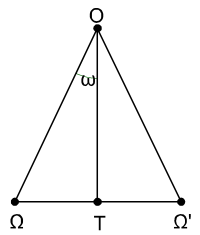

Figura 1.72: $\Omega\Omega' = 2R\sin\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}$

2ω avem $\sin\omega = \frac{OT}{O\Omega}$ (unde T este mijlocul segmentului $\Omega\Omega'$) şi ţinând cont că $O\Omega = R\sqrt{1-4\sin^2\omega}$ rezultă $\Omega\Omega' = 2\cdot OT = 2\cdot\sin\omega\cdot O\Omega = 2R\sin\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}$. □

Teorema 279 *Fie Ω şi Ω' punctele lui Brocard, G centrul de greutate şi K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC. Tripletele de drepte $(A\Omega, BK, CG)$, $(B\Omega, CK, AG)$, $(C\Omega, AK, BG)$, $(A\Omega', CK, BG)$, $(B\Omega', AK, CG)$, $(C\Omega', BK, AG)$ sunt concurente.*

Demonstraţie. Fie $\{\Omega_a\} = A\Omega\cap BC, \{K_b\} = BK\cap AC$ şi $\{M_c\} = CG\cap AB$.

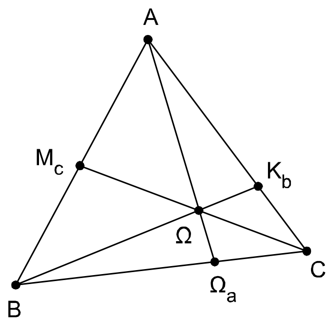

Figura 1.73: Tripletele de drepte concurente

Avem:

$$\frac{B\Omega_a}{\Omega_a C}\cdot\frac{K_bC}{K_bA}\cdot\frac{M_cA}{M_cB} = \left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^2\cdot 1 = 1$$

şi din reciproca lui Ceva rezultă că dreptele $A\Omega, BK$ şi CG sunt concurente (Figura 1.73). Analog, se arată concurenţa celorlalte triplete de drepte. □

Observaţia 280 *Dacă P este punctul de concurenţă al dreptelor $A\Omega, BK$,CG atunci punctul de concurenţă al dreptelor $A\Omega'$,CK,BG este izogonalul punctului P.*

Teorema 281 *Fie Ω primul punct al lui Brocard al unui triunghi ABC şi R_1, R_2, R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\Omega CA, \Omega AB$, respectiv ΩBC. Atunci, $R_1R_2R_3 = R^3$, unde R este raza cercului cercului circumscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Din teorema sinusurilor rezultă $R_1 = \frac{AC}{2\sin\widehat{A\Omega C}} = \frac{AC}{2\sin(\pi - A)} = \frac{AC}{2\sin A}$, $R_2 = \frac{BA}{2\sin\widehat{A\Omega B}} = \frac{AB}{2\sin B}$, $R_3 = \frac{BC}{2\sin C}$, de unde obţinem

$$R_1R_2R_3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{abc}{\sin A\sin B\sin C} = \frac{a}{2\sin A}\cdot\frac{b}{2\sin B}\cdot\frac{c}{2\sin C} = R^3.$$

□

Teorema 282 *Fie Ω primul punct al lui Brocard al unui triunghi ABC şi O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\Omega AC, \Omega AB, \Omega CB$. Triunghiurile ABC şi $O_1O_2O_3$ sunt asemenea.*

Demonstraţie. Avem, $m(\sphericalangle O_2O_1O_3) = 180° - m(\sphericalangle A\Omega C) = m(\sphericalangle A)$, $m(\sphericalangle O_1O_2O_3) =$

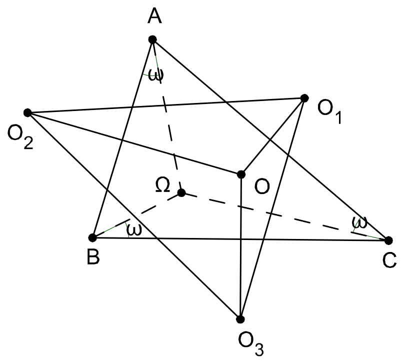

Figura 1.74: Triunghiuri asemenea

$180° - m(\sphericalangle A\Omega B) = m(\sphericalangle B)$, deci triunghiurile $O_1O_2O_3$ şi ABC sunt asemenea (Figura 1.74). □

Teorema 283 *Fie Ω' al doilea punct al lui Brocard şi O_1', O_2', O_3' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\Omega'AB, \Omega'BC$, respectiv $\Omega'CA$. Triunghiurile ABC şi $O_1O_2O_3$ sunt asemenea.*

Demonstraţie. Soluţie analoagă cu precedenta. □

Teorema 284 *Fie Ω primul punct al lui Brocard al triunghiului ABC şi O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\Omega AC, \Omega AB, \Omega CB$. Centrul cercului cercului circumscris triunghiului ABC este primul punct al lui Brocard al triunghiului $O_1O_2O_3$.*

Demonstraţie. Dreptele OO_1, OO_2, OO_3 sunt mediatoarele segmentelor AC, AB, respectiv BC. Atunci, $m(\sphericalangle OO_1O_3) = m(\sphericalangle \Omega CA) = \omega$ fiind unghiuri cu laturile perpendiculare două câte două. Analog, $m(\sphericalangle OO_1O_3) = m(\sphericalangle OO_2O_1) = m(\sphericalangle OO_3O_2) = \omega$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 285 *Fie Ω' al doilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC şi O_1', O_2', O_3' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\Omega'AB, \Omega'BC$, respectiv $\Omega'CA$. Centrul cercului cercului circumscris triunghiului ABC este al doilea punct al lui Brocard al triunghiului $O_1'O_2'O_3'$.*

Demonstraţie. Soluţie analoagă cu precedenta. □

Teorema 286 *Fie Ω şi Ω' punctele lui Brocard al triunghiului ABC, iar $\{A_1\} = B\Omega \cap C\Omega'$, $\{B_1\} = C\Omega \cap A\Omega'$, $\{C_1\} = A\Omega \cap B\Omega'$. Punctele $A_1, B_1, C_1, \Omega, \Omega'$ sunt conciclice.*

Demonstraţie. Deoarece $m(\sphericalangle \Omega AB) = m(\sphericalangle \Omega' BA) = \omega$, rezultă că $m(\sphericalangle AC_1B) =$

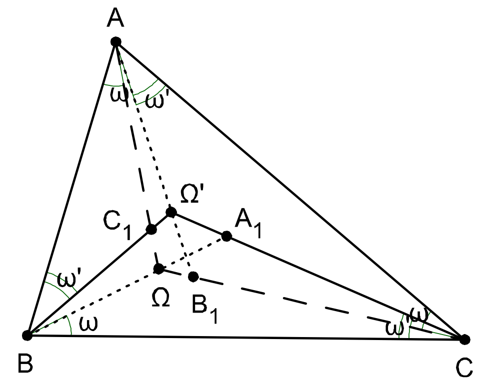

Figura 1.75: Puncte conciclice

$180° - 2\omega$. Dar $m(\sphericalangle \Omega' A_1 \Omega) = 180° - m(\sphericalangle BA_1C) = 2\omega$, deci patrulaterul $C_1, \Omega', A_1, \Omega$ este inscriptibil. Analog se arată că patrulaterul $B_1\Omega C_1\Omega'$ este inscriptibil, deci punctele $A_1, B_1, C_1, \Omega, \Omega'$ sunt conciclice (Figura 1.75). □

Teorema 287 *Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $ctg\omega = 3ctgB$.*

Demonstraţie. Relaţia $ctg\omega = 3ctgB$ este echivalentă cu $ctgA + ctgC = 2ctgB$ (i). Ţinând cont că

$$ctgA = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$$

şi de relaţiile analoage, relaţia (i) devine $2b^2 = a^2 + c^2$, adică numerele a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică. □