1.8 PUNCTUL LUI LONGCHAMPS

„Matematica şi arta izvorăsc din partea cea mai curată a sufletului omenesc, numai că arta este expresia pură a sentimentului, pe când matematica este expresia cristalină a raţiunii pure.” – Immanuel Kant[10]

Simetricul ortocentrului H al unui triunghi faţă de centrul cercului circumscris O al unui triunghi ABC se numeşte ***punctul lui Longchamps***[11] (L).

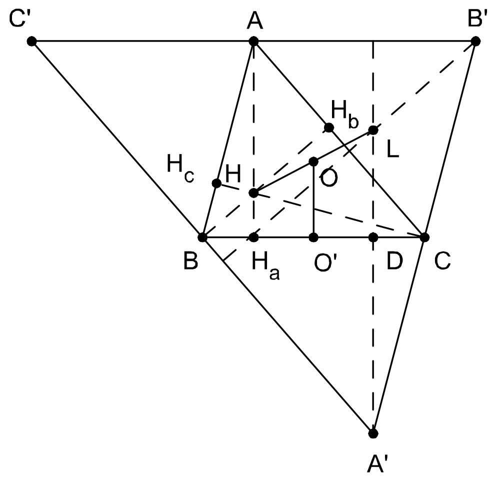

Figura 1.54: L este ortocentrul triunghiului anticomplementar

Teorema 202 *Ortocentrul H, centrul cercului circumscris O şi punctul lui Longchamps L sunt coliniare şi $HO \equiv OL$ şi $LH = 2OH$.*

Demonstraţie. Soluţia este evidentă. □

Teorema 203 *Dacă G este centrul de greutate al unui triunghi ABC, atunci $LG = \frac{4}{3}OH$.*

Demonstraţie. Soluţia este evidentă. □

Teorema 204 *Punctul lui Longchamps al triunghiului ABC aparţine dreptei lui Euler a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Din definiţia punctului lui Longchamps rezultă concluzia. □

Teorema 205 *Punctul lui Longchamps (L), punctul lui Bevan (V) şi punctul lui Nagel (N) al triunghiului ABC sunt coliniare şi $NV \equiv VL$.*

[10] Immanuel Kant (1724-1804) – filosof german

[11] G. de Longchamps (1842-1906) – matematician francez, contribuţii în geometrie

Demonstraţie. Vezi „Punctul lui Bevan”. □

Teorema 206 *Coordonatele baricentrice ale punctului lui Longchamps al unui triunghi ABC sunt*

$$L\left(\frac{R^2}{2S}\sin 2A - ctgBctgC, \frac{R^2}{2S}\sin 2B - ctgCctgA, \frac{R^2}{2S}\sin 2C - ctgActgB\right),$$

unde prin S am notat aria triunghiului ABC.

Demonstraţie. Deoarece O este mijlocul segmentului HL, iar

$$O\left(\frac{R^2}{2S}\sin 2A, \frac{R^2}{2S}\sin 2B, \frac{R^2}{2S}\sin 2C\right)$$

şi $H(ctgBctgC, ctgCctgA, ctgActgB)$, rezultă concluzia. □

Teorema 207 *Punctul lui Longchamps al unui triunghi ABC este ortocentrul triunghiului anticomplementar al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie H ortocentrul triunghiului ABC (Figura 1.54) şi L_1 ortocentrul triunghiului anticomplementar $A'B'C'$,$\{D\} = A'L_1 \cap BC$, $\{H_a\} = AH \cap BC$ şi O_1 mijlocul segmentului L_1H. Din congruenţa triunghiurilor BDA' şi AH_aC rezultă $BD \equiv CH_a$ (i). Fie O'proiecţia lui O_1 pe BC. Cum O_1 este mijlocul segmentului L_1H rezultă că O' este mijlocul segmentului DH_a, adică $DO' \equiv O'H_a$ (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că $BO' \equiv O'C$, adică O_1O' este mediatoarea segmentului BC. Analog se arată că O_1 aparţine şi mediatoarelor segmentelor AC, respectiv AB, adică O_1 coincide cu O - centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar cum L_1este simetricul lui H faţă de O rezultă că L_1 coincide cu L - punctul lui Longchamps al triunghiului ABC. □

Teorema 208 *Punctul lui Longchamps aparţine dreptei lui Soddy corespunzătoare triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Coordonatele baricentrice ale punctului lui Longchamps verifică ecuaţia dreptei lui Soddy

$$(p-a)^2(c-b)x + (p-b)^2(a-c)y + (p-c)^2(b-a)z = 0$$

(vezi „Punctele Soddy”), deci L aparţine acestei drepte. □

Teorema 209 *Dreapta Soddy intersectează dreapta lui Euler în punctul lui Longchamps al triunghiului.*

Demonstraţie. Soluţia este evidentă întrucât punctul lui Longchamps aparţine ambelor drepte. □

Teorema 210 *Triunghiul podar al punctului lui Longchamps al unui triunghi ABC este triunghiul cevian al retrocentrului triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Vezi „Retrocentrul unui triunghi”. □

Observaţia 211 *Simetricul punctului lui Longchamps faţă de centrul cercului înscris în triunghiul ABC se numeşte* ***punctul lui Longuet − Higgins****.*

Teorema 212 *Fie $\wp_A$ cercul având centrul în vârful A al triunghiului ABC şi raza de lungime egală cu cea a laturii opuse BC; analog se definesc şi cercurile $\wp_B$ şi $\wp_C$. Axele radicale ale perechilor de cercuri considerate sunt concurente în punctul lui Longchamps al triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Fie $A'B'C'$ triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC

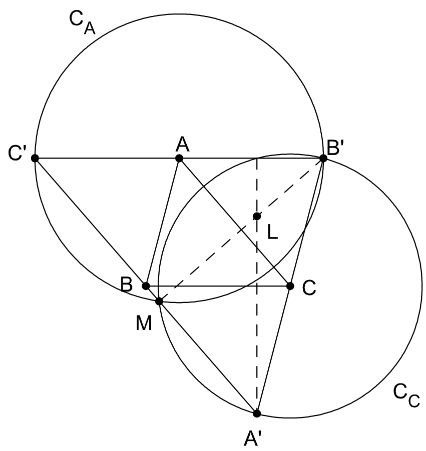

Figura 1.55: Axe radicale concurente in L

şi A'' piciorul înălţimii din A' pe $B'C'$ (Figura 1.55). Fie M al doilea punct de intersecţie dintre cercurile $\wp_A$ şi $\wp_C$, iar $\{L\} = A'A'' \cap B'M$. Deoarece axa radicală $B'M$ este perpendiculară pe linia centrelor AC, iar $AC \parallel A'C'$ (AC fiind linie mijlocie în triunghiul $A'B'C'$), rezultă $B'M \perp A'C'$, deci $B'M$ este dreapta suport a înălţimii din B' a triunghiului anticomplementar $A'B'C'$. Atunci L punctul de intersecţie dintre înălţimile $A'A''$ şi $B'M$ este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$, deci L este punctul lui Longchamps. Analog axele radicale ale cercurilor $\wp_A$ şi $\wp_B$, respectiv $\wp_B$ şi $\wp_C$ trec tot prin L, deci L este centrul radical al cercurilor $\wp_A, \wp_B, \wp_C$. □