

1.13 PUNCTELE LUI SODDY. PUNCTELE LUI EPP-STEIN

„A rezolva o problemă înseamnă a găsi o ieșire dintr-o dificultate, înseamnă a găsi o cale de a ocoli un obstacol, de a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil. A găsi soluția unei probleme este o performanță specifică inteligenței, iar inteligența este apanajul distinctiv al speciei umane; se poate spune că, dintre toate îndeletnicirile omenești, cea de rezolvare a problemelor este cea mai caracteristică.” – George Polya¹⁸

Fie triunghiul ABC având lungimile laturilor a, b , respectiv c și $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Considerăm cercurile $C_1(A, r_1)$, $C_2(B, r_2)$, $C_3(C, r_3)$ conținând punctele C_c și C_b , C_a și C_c , respectiv C_b și C_a .

Teorema 295 *Cercurile $C_1(A, r_1)$, $C_2(B, r_2)$, $C_3(C, r_3)$ sunt tangente două câte două.*

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Descartes”. □

Teorema 296 *Razele cercurilor $C_1(A, r_1)$, $C_2(B, r_2)$, $C_3(C, r_3)$ sunt egale cu $p-a$, $p-b$, respectiv $p-c$.*

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Descartes”. □

Observația 297

1) Cercul tangent exterior cercurilor $C_1(A, r_1)$, $C_2(B, r_2)$, $C_3(C, r_3)$ aflat în interiorul triunghiului ABC se numește **cercul interior Soddy**¹⁹ (Figura 1.77). Centrul cercului interior Soddy îl vom nota cu S_i .

2) Cercul tangent exterior cercurilor $C_1(A, r_1)$, $C_2(B, r_2)$, $C_3(C, r_3)$ astfel încât triunghiul ABC este situat în interiorul său se numește **cercul exterior Soddy** (Figura 1.80). Centrul cercului exterior Soddy îl vom nota cu S_e .

3) Dreapta $S_i S_e$ se numește **dreapta lui Soddy**. Punctele S_i și S_e se numesc **punctele lui Soddy**.

Teorema 298 *Razele cercurilor Soddy au lungimile egale cu:*

$$R_{i,e} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 \pm 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}}$$

(semnul „+” se ia pentru raza cercului interior și semnul „-” se ia pentru raza cercului exterior).

Demonstrație. Din formula lui Descartes

$$2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2$$

unde $\varepsilon_1 = \frac{1}{r_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{r_2}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{r_3}$, iar $\varepsilon_4 = \frac{1}{R_i}$ (pentru cercul Soddy interior) și $\varepsilon_4 = -\frac{1}{R_e}$ (pentru cercul Soddy exterior), rezolvând ecuația de gradul al doilea ce se obține, va rezulta concluzia. □

¹⁸George Polya (1887-1985) – matematician ungar, profesor la Universitatea Stanford, contribuții în teoria grafurilor

¹⁹Frederick Soddy (1877-1956) – chimist, laureat al Premiului Nobel în anul 1921

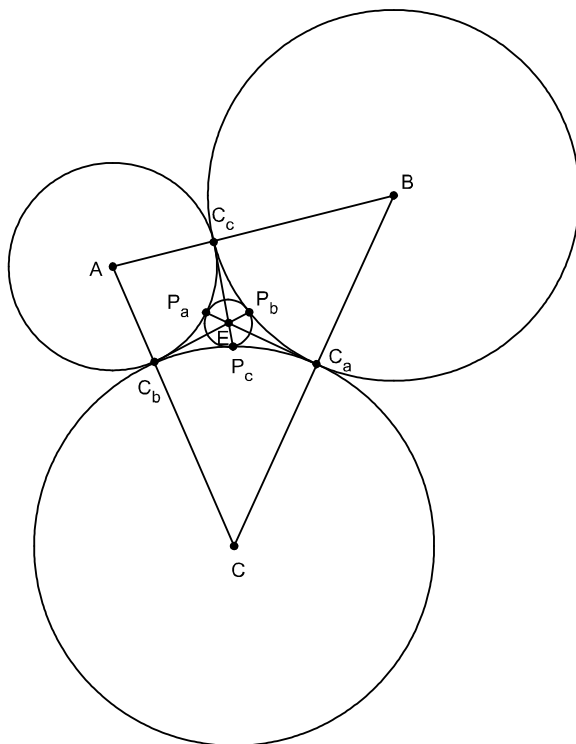


Figura 1.77: Cercul interior Soddy

Teorema 299 Razele cercurilor Soddy au lungimile egale cu:

$$R_{i,e} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 \pm 2A_{[ABC]}}$$

(semnul „+” se ia pentru raza cercului interior și semnul „-” se ia pentru raza cercului exterior).

Demonstrație. Deoarece $A_{[ABC]} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1 r_2 r_3}$, rezultă concluzia. □

Teorema 300 Razele cercurilor Soddy au lungimile egale cu:

$$R_{i,e} = \frac{A_{[ABC]}}{4R + r \pm 2p}$$

(semnul „+” se ia pentru raza cercului interior și semnul „-” se ia pentru raza cercului exterior).

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} R_{i,e} &= \frac{A_{[ABC]}}{\frac{A_{[ABC]}}{r_1} + \frac{A_{[ABC]}}{r_2} + \frac{A_{[ABC]}}{r_3} \pm \frac{A_{[ABC]}^2}{r_1 r_2 r_3}} \\ &= \frac{A_{[ABC]}}{r_a + r_b + r_c + 2(r_1 + r_2 + r_3)} = \frac{A_{[ABC]}}{4R + r \pm 2p}. \end{aligned} \quad (\square)$$

Teorema 301 Distanțele de la centrul Soddy interior la laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC sunt egale cu:

$$2R_i \left(1 + \frac{A_{[ABC]}}{a(p-a)} \right), 2R_i \left(1 + \frac{A_{[ABC]}}{b(p-b)} \right), 2R_i \left(1 + \frac{A_{[ABC]}}{c(p-c)} \right).$$

Demonstrație. Paralela dusă prin punctul A la BC intersectează cercul C_1 în punctele R_2 și R_3 (Figura 1.78). Deoarece triunghiurile AR_3C_b și CC_aC_b sunt isoscele

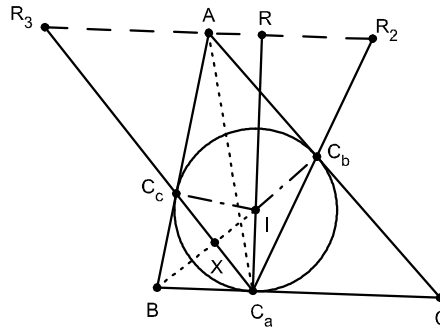


Figura 1.78: Distanțele de la S_i la laturi

și $\widehat{R_3AC_b} \equiv \widehat{C_aCC_b}$ (unghiuri alterne interne) rezultă că $\widehat{R_3C_bA} \equiv \widehat{C_aC_bC}$, deci punctele R_3, C_b, C_a sunt coliniare; analog punctele R_2, C_c, C_a sunt coliniare. Fie inversiunea T de centru C_a și putere $k = C_aC_b \cdot C_aR_3$ (prin această inversiune cercul C_1 se transformă în el însuși).

Prin această inversiune cercurile C_2 și C_3 se transformă în două drepte perpendiculare pe BC și tangente în punctele R_2 și R_3 la cercul C_1 . Fie $\{X\} = BI \cap C_aC_c$ și $\{R\} = C_aI \cap R_2R_3$. Deoarece $m(\widehat{BXC}) = m(\widehat{R_3RC}) = 90^\circ$ rezultă că patrulaterul $XIRR_3$ este inscriptibil. Atunci,

$$k = C_aC_b \cdot C_aR_3 = 2 \cdot C_aX \cdot C_aR_3 = 2 \cdot C_aI \cdot C_aR = 2rh_a.$$

Prin inversiunea de centru C_a și putere $2rh_a$ cercul Soddy interior se transformă într-un cerc C' congruent cu C_1 și tangent acestuia (Figura 1.79). Centrul M al acestui cerc C' se află pe înălțimea AH_a . Fie d_a distanța de la S_i la BC . Din asemănarea cercului Soddy interior cu cercul C' rezultă $\frac{d_a}{MH_a} = \frac{R_i}{r_1}$, de unde avem:

$$d_a = \frac{R_i(2r_1 + h_a)}{r_1} = 2R_i \left(1 + \frac{h_a}{2r_1} \right) = 2R_i \left(1 + \frac{A_{[ABC]}}{a(p-a)} \right).$$

Analog se determină și celelalte două distanțe. □

Teorema 302 Coordonatele baricentrice absolute ale punctului Soddy interior sunt:

$$S_i \left(\frac{a + \frac{A_{[ABC]}}{p-a}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}}, \frac{b + \frac{A_{[ABC]}}{p-b}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}}, \frac{c + \frac{A_{[ABC]}}{p-c}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \right).$$

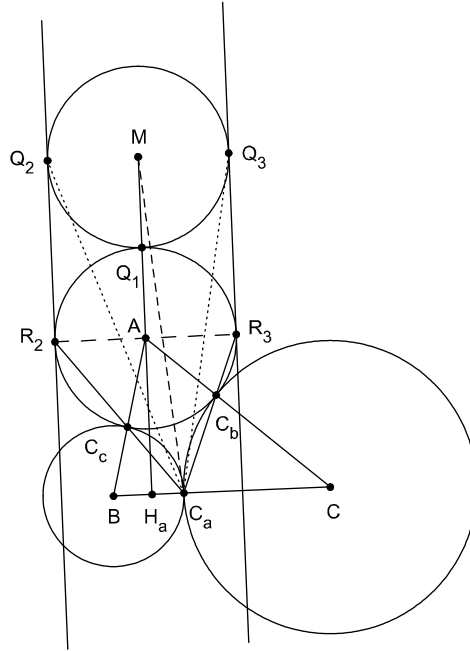


Figura 1.79: Inversiunea de centru C_a și putere $2rh_a$ a cercului Soddy interior

Demonstrație. Coordonatele baricentrice relative ale punctului Soddy interior sunt

$$S_i(ad_a, bd_b, cd_c) = S_i \left(a + \frac{A_{[ABC]}}{p-a}, b + \frac{A_{[ABC]}}{p-b}, c + \frac{A_{[ABC]}}{p-c} \right)$$

și ținând seama de teorema 300 avem: $a + \frac{A_{[ABC]}}{p-a} + b + \frac{A_{[ABC]}}{p-b} + c + \frac{A_{[ABC]}}{p-c} = 4R + r + 2p = \frac{A_{[ABC]}}{R_i}$ și de aici rezultă concluzia. \square

Teorema 303 Pentru orice punct M din planul unui triunghi ABC este adevărată relația:

$$\overrightarrow{MS_i} = \frac{a + \frac{A_{[ABC]}}{p-a}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \overrightarrow{MA} + \frac{b + \frac{A_{[ABC]}}{p-b}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \overrightarrow{MB} + \frac{c + \frac{A_{[ABC]}}{p-c}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \overrightarrow{MC}.$$

Demonstrație. Vezi teorema precedentă. \square

Teorema 304 Afixul punctului Soddy interior corespunzător unui triunghi ABC este egal cu

$$z_{S_i} = \frac{a + \frac{A_{[ABC]}}{p-a}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} z_A + \frac{b + \frac{A_{[ABC]}}{p-b}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} z_B + \frac{c + \frac{A_{[ABC]}}{p-c}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} z_C.$$

Demonstrație. Vezi teorema precedentă. \square

Teorema 305 Dacă S_i, I, Γ sunt punctele Soddy interior, centrul cercului înscris, respectiv punctul lui Gergonne corespunzătoare unui triunghi ABC , atunci pentru orice punct M din planul unui triunghi ABC este adevărată relația:

$$\overrightarrow{MS_i} = \frac{(a+b+c)\overrightarrow{MI} + (r_a+r_b+r_c)\overrightarrow{M\Gamma}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}}$$

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MS_i} &= \frac{a + \frac{A_{[ABC]}}{p-a}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \overrightarrow{MA} + \frac{b + \frac{A_{[ABC]}}{p-b}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \overrightarrow{MB} + \frac{c + \frac{A_{[ABC]}}{p-c}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \overrightarrow{MC} \\ &= \frac{(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}) + A_{[ABC]} \left(\frac{1}{p-a} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{p-b} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{p-c} \overrightarrow{MC} \right)}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \\ &= \frac{(a+b+c)\overrightarrow{MI} + A_{[ABC]} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) \overrightarrow{M\Gamma}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}} \\ &= \frac{(a+b+c)\overrightarrow{MI} + (r_a+r_b+r_c)\overrightarrow{M\Gamma}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}}, \end{aligned}$$

unde am utilizat relațiile: $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MI}$ și

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{p-a} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{p-b} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{p-c} \overrightarrow{MC} \right)$$

cu $s = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$. □

Teorema 306 Punctele Soddy interior, centrul cercului înscris, respectiv punctul lui Gergonne corespunzătoare unui triunghi ABC , sunt coliniare și

$$\frac{S_i I}{S_i \Gamma} = \frac{4R + r}{2p}.$$

Demonstrație. Deoarece $\overrightarrow{MS_i} = \frac{(a+b+c)\overrightarrow{MI} + (r_a+r_b+r_c)\overrightarrow{M\Gamma}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}}$, rezultă că punctele I, S_i, Γ sunt coliniare, în această ordine, iar punctul S_i împarte segmentul $I\Gamma$ în raportul $\frac{r_a+r_b+r_c}{a+b+c} = \frac{4R+r}{2p}$. □

Teorema 307 Distanțele de la centrul Soddy exterior la laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC sunt egale cu:

$$-2R_e \left(1 - \frac{A_{[ABC]}}{a(p-a)} \right), -2R_e \left(1 - \frac{A_{[ABC]}}{b(p-b)} \right), -2R_e \left(1 - \frac{A_{[ABC]}}{c(p-c)} \right).$$

Demonstrație. Soluție analoagă cu cea din teorema 302. □

Teorema 308 *Coordonatele baricentrice absolute ale punctului Soddy exterior sunt*

$$S_e \left(\frac{a - \frac{A_{[ABC]}}{p-a}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_e}}, \frac{b - \frac{A_{[ABC]}}{p-b}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_e}}, \frac{c - \frac{A_{[ABC]}}{p-c}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_e}} \right).$$

Demonstrație. Soluție analogă cu cea din teorema 303. \square

Teorema 309 *Pentru orice punct M din planul unui triunghi ABC este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{MS_e} = \frac{a - \frac{A_{[ABC]}}{p-a}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_e}} \overrightarrow{MA} + \frac{b - \frac{A_{[ABC]}}{p-b}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_e}} \overrightarrow{MB} + \frac{c - \frac{A_{[ABC]}}{p-c}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_e}} \overrightarrow{MC}.$$

Demonstrație. Vezi teorema 308. \square

Teorema 310 *Dacă S_e, I, Γ sunt punctele Soddy exterior, centrul cercului înscris, respectiv punctul lui Gergonne corespunzătoare unui triunghi ABC , atunci pentru orice punct M din planul unui triunghi ABC este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{MS_e} = \frac{(a+b+c)\overrightarrow{MI} - (r_a+r_b+r_c)\overrightarrow{M\Gamma}}{\frac{A_{[ABC]}}{R_i}}.$$

Demonstrație. Vezi teorema 305. \square

Teorema 311 *Punctele Soddy exterior, centrul cercului înscris, respectiv punctul lui Gergonne corespunzătoare unui triunghi ABC , sunt coliniare și*

$$\frac{S_e I}{S_e \Gamma} = \frac{4R+r}{2p}.$$

Demonstrație. Soluție analogă cu cea din teorema 306. \square

Teorema 312 *Centrul cercului înscris, punctul lui Gergonne și punctele lui Soddy corespunzătoare unui triunghi ABC sunt coliniare.*

Demonstrație. Din teoremele 306 și 311 rezultă $\frac{S_i I}{S_i \Gamma} = \frac{S_e I}{S_e \Gamma}$. \square

Observația 313 *Teorema precedentă poate fi reformulată astfel: centrul cercului înscris și punctul lui Gergonne aparțin dreptei lui Soddy.*

Teorema 314 *Punctele lui Soddy sunt conjugate armonic cu centrul cercului înscris și cu punctul lui Gergonne.*

Demonstrație. Vezi teoremele 306 și 311. \square

Teorema 315 *Dacă S_e este punctul Soddy exterior și $a+b+c > 4R+r$, atunci triunghiurile $S_e BC, S_e CA$ și $S_e AB$ au același perimetru, egal cu $2R_e$.*

Demonstrație. Avem $S_eB + S_eC + BC = (R_e - r_2) + (R_e - r_3) + (r_2 + r_3) = 2R_e$. Analog, $S_eC + S_eA + CA = 2R_e$ și $S_eA + S_eB + AB = 2R_e$, deci triunghiurile S_eBC, S_eCA și S_eAB au același perimetru. \square

Observația 316 *Punctul S_e se numește punctul izoperimetric al triunghiului ABC .*

Teorema 317 *Dreaptele lui Soddy și Gergonne sunt perpendiculare.*

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Gergonne”. \square

Teorema 318 *Fie P_a, P_b, P_c punctele de tangență dintre cercul Soddy interior și cercurile $C_1(A, r_1), C_2(B, r_2),$ respectiv $C_3(C, r_3)$. Dreptele C_aP_a, C_bP_b, C_cP_c sunt concurente.*

Demonstrație. Deoarece $\frac{CC_a}{BC_a} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$ rezultă că afixul punctului C_a este: $z_{C_a} = \frac{\varepsilon_2 z_B + \varepsilon_3 z_C}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}$. Analog, $z_{C_b} = \frac{\varepsilon_3 z_C + \varepsilon_1 z_A}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1}, z_{C_c} = \frac{\varepsilon_1 z_A + \varepsilon_2 z_B}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, z_{P_a} = \frac{\varepsilon_1 z_A + \varepsilon_4 z_{S_i}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_4}, z_{P_b} = \frac{\varepsilon_2 z_B + \varepsilon_4 z_{S_i}}{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}, z_{P_c} = \frac{\varepsilon_3 z_C + \varepsilon_4 z_{S_i}}{\varepsilon_3 + \varepsilon_4}$. Vom arăta că punctul E_i de afix

$$z_{E_i} = \frac{\varepsilon_1 z_A + \varepsilon_2 z_B + \varepsilon_3 z_C + \varepsilon_4 z_{S_i}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}$$

aparține dreptelor C_aP_a, C_bP_b, C_cP_c . Deoarece

$$\frac{\varepsilon_1 z_A + \varepsilon_2 z_B + \varepsilon_3 z_C + \varepsilon_4 z_{S_i}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) z_{C_c} + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4) z_{P_c}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4},$$

rezultă că punctul E_i aparține dreptei C_cP_c . Analog, grupând convenabil termenii sumei de la numărătorul afixului punctului E_i , se arată că punctul E_i aparține și dreptelor C_aP_a, C_bP_b , deci dreptele C_aP_a, C_bP_b, C_cP_c sunt concurente.

Observația 319 *Punctul E_i de concurență al dreptelor C_aP_a, C_bP_b, C_cP_c se numește punctul Eppstein²⁰ – Oldknow interior. Triunghiul $P_aP_bP_c$ se numește triunghiul Soddy interior.*

Teorema 320 *Fie P'_a, P'_b, P'_c punctele de tangență dintre cercul Soddy exterior și cercurile $C_1(A, r_1), C_2(B, r_2),$ respectiv $C_3(C, r_3)$. Dreptele $C_aP'_a, C_bP'_b, C_cP'_c$ sunt concurente.*

Demonstrație. Soluția este analoagă cu cea din teorema precedentă (Figura 1.80).

\square

²⁰David Eppstein (1871-1939) – matematician american, profesor la Universitatea din California

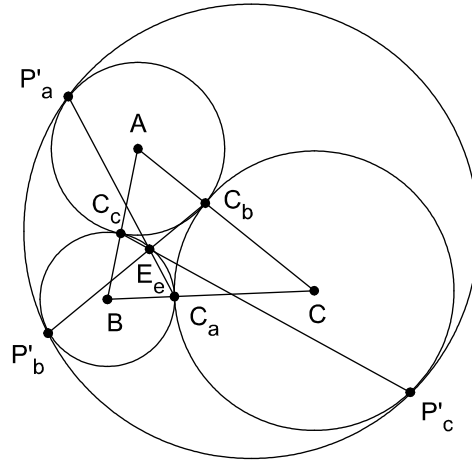


Figura 1.80: Cercul Soddy exterior

Teorema 321 *Punctele Soddy interior, Eppstein – Oldknow interior și Gergonne, corespunzătoare unui triunghi ABC sunt coliniare.*

Demonstrație. Deoarece afixul punctului lui Gergonne este $z_{\Gamma} = \frac{\varepsilon_1 z_A + \varepsilon_2 z_B + \varepsilon_3 z_C}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}$ (vezi „Punctul lui Gergonne”) și

$$\begin{aligned} z_{E_i} &= \frac{\varepsilon_1 z_A + \varepsilon_2 z_B + \varepsilon_3 z_C + \varepsilon_4 z_{S_i}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4} = \frac{(\varepsilon_1 z_A + \varepsilon_2 z_B + \varepsilon_3 z_C) + \varepsilon_4 z_{S_i}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4} \\ &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) z_{\Gamma} + \varepsilon_4 z_{S_i}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}. \end{aligned}$$

rezultă că punctele E_i, S_i și Γ sunt coliniare. □

Teorema 322 *Punctele Soddy exterior, Eppstein – Oldknow exterior și Gergonne, corespunzătoare unui triunghi ABC sunt coliniare.*

Demonstrație. Soluția este analoagă cu cea din teorema precedentă. □

Teorema 323 *Punctele lui Eppstein – Oldknow aparțin dreptei lui Soddy.*

Demonstrație. Soluția rezultă din teoremele 314, 321 și 322. □

Teorema 324 *Coordonatele baricentrice relative ale punctului Eppstein – Oldknow interior sunt:*

$$E_i \left(a + \frac{2A_{[ABC]}}{r_1}, b + \frac{2A_{[ABC]}}{r_2}, c + \frac{2A_{[ABC]}}{r_3} \right).$$

Demonstrație. Deoarece P_a, P_b, P_c sunt punctele de tangență dintre cercul Soddy interior și cercurile C_1, C_2 , respectiv C_3 rezultă $\frac{S_i P_a}{AP_a} = \frac{R_i}{r_1}$, deci $\overrightarrow{MP_a} = \frac{r_1 \overrightarrow{MS_i} + R_i \overrightarrow{MA}}{r_1 + R_i}$

$$\overrightarrow{MP_a} = \frac{r_1 R_i}{A_{[ABC]}(r_1 + R_i)} \left[\left(a + \frac{2A_{[ABC]}}{r_1} \right) \overrightarrow{MA} + \left(b + \frac{A_{[ABC]}}{r_2} \right) \overrightarrow{MB} + \left(c + \frac{A_{[ABC]}}{r_3} \right) \overrightarrow{MC} \right]$$

(unde am utilizat teorema 314). Atunci, coordonatele baricentrice relative ale punctului P_a sunt $\left(a + \frac{2A_{[ABC]}}{r_1}, b + \frac{A_{[ABC]}}{r_2}, c + \frac{A_{[ABC]}}{r_3}\right)$. Coordonatele baricentrice relative ale punctului C_a sunt $\left(0, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}\right)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} a + \frac{2A_{[ABC]}}{r_1} & b + \frac{2A_{[ABC]}}{r_2} & c + \frac{2A_{[ABC]}}{r_3} \\ a + \frac{2A_{[ABC]}}{r_1} & b + \frac{2A_{[ABC]}}{r_2} & c + \frac{2A_{[ABC]}}{r_3} \\ 0 & 1/r_2 & 1/r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă că punctele C_a , P_a și E_i sunt coliniare. Analog se arată că punctul E_i aparține dreptelor C_bP_b, C_cP_c , deci $E_i \left(a + \frac{2A_{[ABC]}}{r_1}, b + \frac{2A_{[ABC]}}{r_2}, c + \frac{2A_{[ABC]}}{r_3}\right)$ este punctul Eppstein interior. \square

Teorema 325 *Coordonatele baricentrice relative ale punctului Eppstein – Oldknow exterior sunt:*

$$E_e \left(a - \frac{2A_{[ABC]}}{r_1}, b - \frac{2A_{[ABC]}}{r_2}, c - \frac{2A_{[ABC]}}{r_3}\right).$$

Demonstrație. Soluție analoagă cu precedentă. \square

Teorema 326 *Dacă E_i, I, Γ sunt punctele Eppstein interior, centrul cercului înscris, respectiv punctul lui Gergonne corespunzătoare unui triunghi ABC , atunci pentru orice punct M din planul unui triunghi ABC este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{ME_i} = \frac{(a + b + c)\overrightarrow{MI} + 2(r_a + r_b + r_c)\overrightarrow{M\Gamma}}{a + b + c + 2(r_a + r_b + r_c)}.$$

Demonstrație. Deoarece

$$\begin{aligned} & a + \frac{2A_{[ABC]}}{r_1} + b + \frac{2A_{[ABC]}}{r_2} + c + \frac{2A_{[ABC]}}{r_3} \\ &= 2p + 2A_{[ABC]} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) = 2(p + 4R + r) = \alpha, \end{aligned}$$

rezultă că pentru orice punct M avem:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME_i} &= \frac{1}{\alpha} \left[\left(a + \frac{2A_{[ABC]}}{r_1}\right) \overrightarrow{MA} + \left(b + \frac{2A_{[ABC]}}{r_2}\right) \overrightarrow{MB} + \left(c + \frac{2A_{[ABC]}}{r_3}\right) \overrightarrow{MC} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}) + 2A_{[ABC]} \left(\frac{1}{p-a}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{p-b}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{p-c}\overrightarrow{MC}\right) \right] \\ &= \frac{(a + b + c)\overrightarrow{MI} + 2A_{[ABC]} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \overrightarrow{M\Gamma}}{(a + b + c) + 2A_{[ABC]} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right)} \\ &= \frac{(a + b + c)\overrightarrow{MI} + 2(r_a + r_b + r_c)\overrightarrow{M\Gamma}}{a + b + c + 2(r_a + r_b + r_c)}. \end{aligned}$$

\square

Teorema 327 *Punctul Eppstein interior împarte segmentul $I\Gamma$ în raportul $\frac{2(r_a+r_b+r_c)}{a+b+c}$.*

Demonstrație. Din teorema precedentă rezultă $\frac{E_i I}{E_i \Gamma} = \frac{2(r_a+r_b+r_c)}{a+b+c}$. \square

Teorema 328 *Dacă E_e, I, Γ sunt punctele Eppstein exterior, centrul cercului înscris, respectiv punctul lui Gergonne corespunzătoare unui triunghi ABC , atunci pentru orice punct M din planul unui triunghi ABC este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{ME_e} = \frac{(a+b+c)\overrightarrow{MI} - 2(r_a+r_b+r_c)\overrightarrow{M\Gamma}}{a+b+c-2(r_a+r_b+r_c)}.$$

Demonstrație. Soluție analogă cu cea din teorema 326. \square

Teorema 329 *Punctul Eppstein exterior împarte segmentul $I\Gamma$ în raportul*

$$\frac{E_e I}{E_e \Gamma} = \frac{2(r_a+r_b+r_c)}{a+b+c}.$$

Demonstrație. Vezi teorema precedentă. \square

Teorema 330 *Punctele lui Eppstein sunt conjugate armonic cu centrul cercului înscris și cu punctul lui Gergonne.*

Demonstrație. Din teoremele 327 și 329 rezultă $\frac{E_i I}{E_i \Gamma} = \frac{E_e I}{E_e \Gamma}$. \square

Teorema 331 *Ecuția dreptei lui Soddy în coordonate baricentrice este:*

$$(p-a)^2(c-b)x + (p-b)^2(a-c)y + (p-c)^2(b-a)z = 0.$$

Demonstrație. Deoarece punctul lui Gergonne și centrul cercului înscris în triunghiul ABC aparțin dreptei Soddy, ecuația dreptei lui Soddy în coordonate baricentrice este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{p-a} & \frac{1}{p-b} & \frac{1}{p-c} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$(I\Gamma) : (p-a)^2(c-b)x + (p-b)^2(a-c)y + (p-c)^2(b-a)z = 0.$$

\square