

CAPITOLUL III

TRIUNGHIURI REMARCABILE

III.1. Triunghiul ortic

„Matematica poate să descopere o anumită ordine chiar și în haos.” - Ch. Stein¹⁷⁴

În triunghiul ABC , fie H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor duse din vârfurile A, B , respectiv C pe laturile triunghiului ABC . Triunghiul $H_a H_b H_c$ se numește **triunghiul ortic** al triunghiului ABC .

1) Triunghiul ortic este triunghiul cevian al triunghiului ABC corespunzător ortocentrului.

2) Triunghiul ortic este triunghiul podar al ortocentrului triunghiului ABC în raport cu triunghiul ABC .

3) Triunghiurile $AH_b H_c, H_a B H_c, H_b H_a C$ sunt asemenea cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Deoarece patrulaterul $BCH_b H_c$ este inscriptibil ($\angle BH_b C \equiv \angle BH_c C$) rezultă că $\angle AH_c H_b \equiv \angle ACB$ și $\angle AH_b H_c \equiv \angle ABC$, deci triunghiurile $AH_c H_b$ și ACB sunt asemenea. Analog se arată că triunghiurile $H_a B H_c$ și $H_b H_a C$ sunt asemenea cu triunghiul ABC .

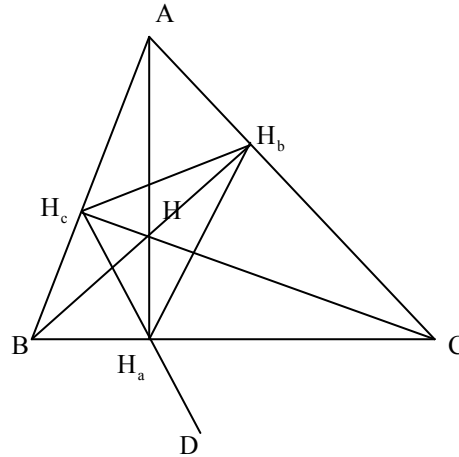


Fig. 358

4) Dreptele $H_a H_b, H_b H_c, H_c H_a$ sunt antiparalele cu dreptele AB, BC , respectiv CA .

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

5) Semidreptele $[AH_a], [BH_b], [CH_c]$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic.

Demonstrație. Deoarece $\angle BH_a H_c \equiv \angle BH_a H_b \equiv \angle BAC$ rezultă că $m(\angle H_c H_a A) = m(\angle H_b H_a A) = 90^\circ - m(\angle BAC)$, iar AH_a este bisectoarea unghiului $\angle H_b H_a H_c$. Analog, BH_b și CH_c sunt bisectoarele unghiurilor $\angle H_a H_b H_c$, respectiv $\angle H_b H_c H_a$.

¹⁷⁴Charles Stein (1920 -) – matematician american, profesor la Universitatea Stanford, contribuții în statistica matematică

6) Ortocentrul H al triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ortic $H_aH_bH_c$.

Demonstrație. Deoarece AH_a, BH_b, CH_c sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic rezultă că punctul de intersecție al lor (adică H) este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

7) Vârfurile triunghiului ABC sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului ortic $H_aH_bH_c$.

Demonstrație. Fie $D \in H_cH_a$ astfel încât $H_a \in [H_cD]$ (Fig. 358). Avem $\square BH_aH_c \equiv \square DH_aC \equiv \square H_bH_aC$, deci H_aC este bisectoarea exterioară a unghiului $\square DH_aH_b$. Cum CH_c este bisectoarea exterioară a unghiului $\square H_aH_cH_b$ rezultă că punctul C este centrul cercului exînscris triunghiului $H_aH_bH_c$ tangent laturii H_aH_b .

8) Cercul circumscris triunghiului ortic al unui triunghi ABC este cercul lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler”.

9) Raza cercului circumscris triunghiului ortic are lungimea egală cu jumătate din lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie A', B', C' punctele de intersecție dintre înălțimile triunghiului ABC (Fig. 359) cu cercul circumscris triunghiului ABC . Deoarece A', B', C' sunt simetrice ortocentrului față de laturile triunghiului ABC , rezultă că triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ este asemenea cu triunghiul $A'B'C'$. Cum H_bH_c, H_cH_a, H_aH_b sunt linii mijlocii în triunghiul $A'B'C'$ rezultă că raportul de

asemănare este $\frac{1}{2}$, deci $R' = \frac{R}{2}$ (R este

raza cercului circumscris triunghiului ABC și R' raza cercului circumscris triunghiului ortic $H_aH_bH_c$).

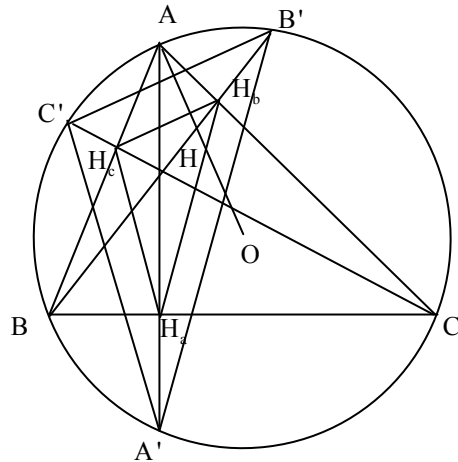


Fig. 359

10) Triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC este omotetic cu triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al ortocentrului H al triunghiului ABC , centrul de omotetie fiind ortocentrul triunghiului ABC

Demonstrația rezultă din teorema precedentă.

11) Lungimile laturilor triunghiului ortic $H_aH_bH_c$ sunt egale cu $a|\cos \square A|, b|\cos \square B|$ și $c|\cos \square C|$, (a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA , respectiv AB).

Demonstrație. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic atunci din asemănarea triunghiurilor ABC și $H_a H_b H_c$ rezultă

$$\frac{H_a H_b}{c} = \frac{H_b C}{a}, \quad \text{de unde}$$

$$H_a H_b = \frac{c}{a} \cdot H_b C = \frac{c}{a} \cdot a \cos \hat{C} = c \cdot \cos \hat{C}.$$

Analog, $H_b H_c = a \cos \hat{A}$ și

$H_c H_a = b \cos \hat{B}$. Fie triunghiul ABC

obtuzunghic (Fig. 360) ($m(\hat{A}) > 90^\circ$).

Din asemănarea triunghiurilor ABC și $AH_c H_b$ rezultă $\frac{H_b H_c}{a} = \frac{a H_b}{b}$, de

unde $H_b H_c = \frac{a}{b} \cdot A H_b$. În triunghiul

$$A H_b C \text{ avem } \cos(180^\circ - \hat{BAC}) = \frac{A H_b}{b},$$

adică $A H_b = -b \cos \hat{A}$, de unde: $H_b H_c = -a \cos \hat{A} = a |\cos \hat{A}|$. Analog, $H_a H_c = b |\cos \hat{B}|$ și

$$H_a H_b = c |\cos \hat{C}|.$$

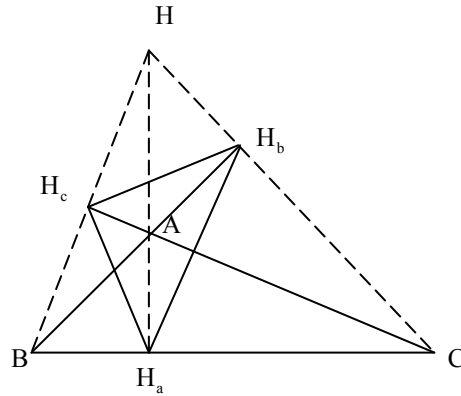


Fig. 360

12) Perimetrul triunghiului ortic este egal cu $a |\cos A| + b |\cos B| + c |\cos C|$.

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

Observație: Pentru un triunghi ascuțitunghic perimetrul triunghiului ortic este egal cu $p_o = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R \sin A \sin B \sin C$.

13) Fie p perimetrul unui triunghi ascuțitunghic ABC și p_o perimetrul triunghiului

ortic. Atunci, $\frac{p}{p_o} = \frac{R}{r}$, unde R și r sunt razele cercului circumscris, respectiv înscris în

triunghiul ABC .

Demonstrație. Avem $p_o = \frac{2A_{[ABC]}}{R} = \frac{rp}{R}$, sau $\frac{p}{p_o} = \frac{R}{r}$.

14) Dintre toate triunghiurile înscrise într-un triunghi ascuțitunghic ABC , triunghiul ortic are perimetrul minim.

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Fagnano”.

15) Dacă tringhiul ABC este ascuțitunghic atunci $m(\hat{H}_b H_a H_c) = 180^\circ - 2m(\hat{BAC})$,

$m(\hat{H}_a H_b H_c) = 180^\circ - 2m(\hat{ABC})$ și $m(\hat{H}_a H_c H_b) = 180^\circ - 2m(\hat{ACB})$.

Demonstrație. Din $m(\hat{B} H_a H_c) = m(\hat{H}_b H_a C) = m(\hat{BAC})$ rezultă $m(\hat{H}_b H_a H_c) = 180^\circ - 2m(\hat{BAC})$.

Analog se arată și celelalte relații.

**16) Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic ($m(\sphericalangle BAC) > 90^\circ$), atunci $m(\sphericalangle H_b H_a H_c) = 2m(\sphericalangle BAC) - 180^\circ$, $m(\sphericalangle H_a H_b H_c) = 2m(\sphericalangle BCA)$, $m(\sphericalangle H_b H_c H_a) = 2m(\sphericalangle ABC)$.
Demonstrație.
 $m(\sphericalangle H_b H_a H_c) = 180^\circ - 2m(\sphericalangle BH_a H_c) = 180^\circ - 2(180^\circ - m(\sphericalangle BAC)) = 2m(\sphericalangle BAC) - 180^\circ$;
 $m(\sphericalangle H_a H_b H_c) = m(\sphericalangle H_a H_b A) + m(\sphericalangle BH_b H_c) = 2m(\sphericalangle ACB)$ și $m(\sphericalangle H_b H_c H_a) = 2m(\sphericalangle ABC)$.**

17) Aria triunghiului ortic este egală cu $A_{[H_a H_b H_c]} = \frac{abc |\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C|}{2R}$ (R este raza cercului circumscris triunghiului ABC).

Demonstrație. Avem $A_{[H_a H_b H_c]} = \frac{H_a H_c \cdot H_a H_b \cdot \sin \sphericalangle H_b H_a H_c}{2}$. Dar $H_a H_c = b |\cos B|$, $H_a H_b = c |\cos C|$. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, atunci $\sin \sphericalangle H_b H_a H_c = \sin(180^\circ - 2A) = \sin(2A) = 2 \sin A \cdot \cos A = \frac{a}{R} \cdot \cos A = \frac{a}{R} \cdot |\cos A|$, de unde rezultă concluzia. Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic ($m(\sphericalangle BAC) > 90^\circ$), atunci $\sin \sphericalangle H_b H_a H_c = \sin(2A - 180^\circ) = -\sin(2A) = -2 \sin A \cdot \cos A = \frac{a}{R} \cdot (-\cos A) = \frac{a}{R} \cdot |\cos A|$,

de unde rezultă concluzia.

18) Fie $H_a H_b H_c$ triunghiului ortic al triunghiului ascuțitunghic ABC . Atunci: $A_{[H_a H_b H_c]} = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot A_{[ABC]}$.

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă, ținând cont că $A_{[ABC]} = \frac{abc}{4R}$.

Observații:

1) Aria triunghiului ortic este maximă când produsul $2 \cos A \cos B \cos C$ este maxim, adică $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60^\circ$, caz în care triunghiul ortic coincide cu triunghiul median.

2) Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic de exemplu $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$, atunci $A_{[H_a H_b H_c]} = 2 \cos(\pi - A) \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot A_{[ABC]}$.

19) Aria triunghiului ortic al ortocentrului triunghiului ABC este egală cu:

$$A_{[H_a H_b H_c]} = \frac{|R^2 - OH^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]}$$

Demonstrație. Vezi „Triunghiul podar”.

20) Raza cercului înscris în triunghiul ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ascuțitunghic ABC este egală cu $2R \cos A \cos B \cos C$.

Demonstrație. Deoarece în triunghiul ABC , $r = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ (vezi „Cercul înscris”), raza cercului circumscris triunghiului ortic este egală cu $\frac{R}{2}$, rezultă:

$$r_h = 4 \cdot \frac{R}{2} \cdot \sin \frac{H_a}{2} \cdot \sin \frac{H_b}{2} \cdot \sin \frac{H_c}{2} = 2R \sin \frac{\pi - 2A}{2} \cdot \sin \frac{\pi - 2B}{2} \cdot \sin \frac{\pi - 2C}{2} = 2R \cos A \cos B \cos C.$$

Observație: Deoarece $A_{[ABC]} = \frac{abc}{4R}$ rezultă $A_{[H_aH_bH_c]} = 2A_{[ABC]} \cdot \cos A \cos B \cos C$.

21) Laturile triunghiului ortic al triunghiului ABC sunt paralele cu tangentele la cercul circumscris triunghiului ABC duse prin vârfurile triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie (TA) tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC . Avem: $m(\sphericalangle TAB) = m(\sphericalangle ACB) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle AC'B)$. Dar $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AH_cH_b$, deci $\sphericalangle TAH_c \equiv \sphericalangle AH_cH_b$, de unde rezultă $TA \parallel H_cH_b$.

22) Triunghiul ortic și triunghiul determinat de tangentele la cercul circumscris unui triunghi ABC în vârfurile triunghiului ABC sunt omotetice.

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

23) Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC și $H_aH_bH_c$ triunghiul său ortic, atunci $HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b = HC \cdot HH_c$.

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor HH_bA și HH_aB , respectiv HH_aC cu HH_cA rezultă $HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b$ și $HA \cdot HH_a = HC \cdot HH_c$, de unde rezultă concluzia.

24) Dreptele ce unesc mijloacele laturilor triunghiului ortic $H_aH_bH_c$ corespunzător unui triunghi ABC cu vârfurile corespunzătoare ale triunghiului ABC , sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Lemoine”.

25) Dreptele care unesc vârfurile triunghiului ortic al triunghiului ABC cu proiecțiile ortocentrului triunghiului ABC pe laturile triunghiului ortic sunt concurente în punctul lui Gergonne al triunghiului ortic.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gergonne”.

26) Dreptele care unesc vârfurile triunghiului ortic al unui triunghi ABC cu punctele de intersecție dintre laturile triunghiului ortic și dreptele AO , BO respectiv CO (unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC) sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului ortic.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Nagel”.

27) Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Triunghiurile ABC , BHC , CHA și AHB au același triunghi ortic.

Demonstrație. Fie $H_a H_b H_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC . Deoarece $HH_a \perp BC, CH_b \perp BH, BH_c \perp HC, H_a \in BC, H_b \in HB, H_c \in HC$ rezultă că triunghiul $H_a H_b H_c$ este triunghiul ortic al triunghiului ABC . Analog, se arată că triunghiurile CHA și AHB au același triunghi ortic.

28) Triunghiurile ortic și extangențial corespunzătoare unui triunghi ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul extangențial”.

29) Razele cercurilor exînscrie corespunzătoare triunghiului ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ascuțitunghic ABC au lungimile: $\rho_a = 2R \cos A \sin B \sin C$, $\rho_b = 2R \sin A \cos B \sin C$ și $\rho_c = 2R \sin A \sin B \cos C$.

Demonstrație. Într-un triunghi ABC , $r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ (vezi „Cercurile exînscrie”). Deoarece triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$, raza cercului circumscris triunghiului este egală cu $\frac{R}{2}$ (vezi „Cercurile exînscrie”). Avem:

$$\rho_a = 4 \frac{R}{2} \sin \frac{H_a}{2} \cos \frac{H_b}{2} \cos \frac{H_c}{2}, \text{ de unde } \rho_a = 2R \sin \frac{\pi - 2A}{2} \cdot \cos \frac{\pi - 2B}{2} \cdot \cos \frac{\pi - 2C}{2} = 2R \cos A \sin B \sin C. \text{ Analog se determină } \rho_b \text{ și } \rho_c.$$

Observație: Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic ($m(\angle BAC) > 90^\circ$) atunci $\rho_a = 2R \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$, $\rho_b = 2R \sin A \sin B \cos C$, $\rho_c = 2R \sin A \cos B \sin C$ (deoarece $m(\angle H_b H_a H_c) = 2m(\angle BAC) - 180^\circ$, $m(\angle H_a H_b H_c) = 2m(\angle CBA)$, $m(\angle H_a H_c H_b) = 2m(\angle BCA)$).

30) Mediatoarele laturilor BC , CA , AB ale triunghiului ascuțitunghic ABC intersectează laturile $H_b H_c$, $H_c H_a$ respectiv $H_a H_b$ ale triunghiului ortic $H_a H_b H_c$ în punctele A' , B' , respectiv C' . Dreptele $H_a A'$, $H_b B'$, $H_c C'$ sunt concurente.

Demonstrație. Fie P și Q proiecțiile punctelor H_c și H_b pe

BC (Fig. 361). Avem $\cos B = \frac{BP}{BH_c} = \frac{BH_c}{BC}$, de unde

$$BP = a \cos^2 B \text{ și } M_a P = M_a B - M_a P = \frac{a}{2}(1 - 2\cos^2 B) = \frac{a}{2} \cos 2B$$

și analog obținem: $M_a Q = \frac{a}{2} \cos 2C$. Din teorema lui Thales

$$\text{avem: } \frac{A' H_b}{A' H_c} = \frac{M_a Q}{M_a P} = \frac{\cos 2C}{\cos 2B}. \text{ Analog se arată că}$$

$$\frac{B' H_c}{B' H_a} = \frac{\cos 2A}{\cos 2C} \text{ și } \frac{C' H_a}{C' H_b} = \frac{\cos 2B}{\cos 2A}, \text{ deci}$$

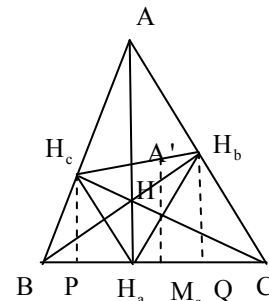


Fig. 361

$\frac{A'H_b}{A'H_c} \cdot \frac{B'H_c}{B'H_a} \cdot \frac{C'H_a}{C'H_b} = 1$, iar din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele H_aA', H_bB', H_cC' sunt concurente.

31) Fie O, O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, BOC, COA respectiv AOB . Triunghiul $O_aO_bO_c$ este omotetic cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie R_a, R_b, R_c razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA respectiv AOB . Deoarece $AO = BO = CO = R$ și $m(\angle BOO_a) = m(\angle A)$ rezultă

$$R_a = \frac{R}{2 \cos A} \text{ și analog } R_b = \frac{R}{2 \cos B}, R_c = \frac{R}{2 \cos C} \text{ (Fig. 362).}$$

Deoarece O_aO_b, O_bO_c, O_cO_a sunt mediatorele segmentelor OC, OA respectiv OB rezultă că O este centrul cercului înscris în triunghiul $O_aO_bO_c$. Întrucât unghiurile triunghiurilor $O_aO_bO_c$ și $H_aH_bH_c$ sunt respectiv congruente și $OO_a \perp H_aH, OO_b \perp H_bH, OO_c \perp H_cH$ (H fiind centrul cercului înscris în triunghiul ortic) rezultă că triunghiurile $O_aO_bO_c$ și $H_aH_bH_c$ sunt omotetice. Cum punctele O și H se corespund în această omotetie rezultă că dreptele O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c sunt concurente într-un punct P ce aparține dreptei

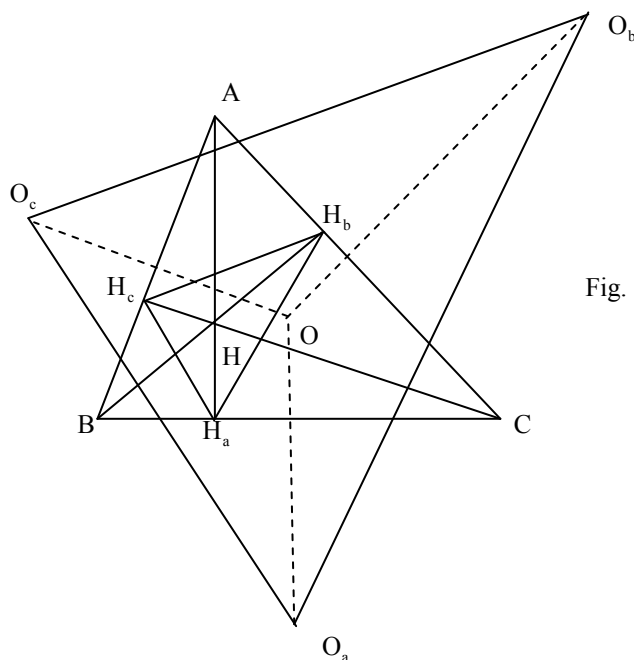


Fig. 362

$$HO. \text{ Deci, raportul de omotetie este: } k = \frac{PH}{PO} = \frac{r_h}{r_o} = \frac{2R \cos A \cos B \cos C}{R/2} = 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

unde $r_h = 2R \cos A \cos B \cos C$ este raza cercului înscris în triunghiul $H_aH_bH_c$ și $r_o = \frac{R}{2}$ este raza cercului $O_aO_bO_c$.

32) Fie H ortocentrul unui triunghi ascuțitunghic ABC , H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor duse din A, B, C și A', B', C' picioarele perpendicularelor duse din H pe $H_b H_c, H_c H_a$, respectiv $H_a H_b$.

Atunci, $A_{[ABC]} \geq 16 \cdot A_{[A'B'C']}$.

Demonstrație. Deoarece patrulaterul $A'H_c B'H$ este inscriptibil (Fig. 363),

rezultă că $\angle A'B'H_c \equiv \angle A'HH_c \equiv \angle H_b H_c A \equiv \angle H_b H_c B$, deci $A'B' \parallel AB$.

Analog, $B'C' \parallel BC$ și $A'C' \parallel AC$. Fie O, O_1, O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC , $H_a H_b H_c$ și $A'B'C'$ iar R, R_1 și R_2

razele acestora. Atunci, $R_1 = \frac{R}{2}$

(deoarece $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ este cercul lui Euler al triunghiului ABC), iar R_2 poate avea cel mult

lungimea razei cercului lui Euler al triunghiului $H_a H_b H_c$, adică $R_2 \leq \frac{R}{4}$ și din asemănarea

triunghiurilor $A'B'C'$ și ABC rezultă $A_{[ABC]} \geq 16 \cdot A_{[A'B'C']}$. Egalitatea are loc atunci când cercul lui Euler al triunghiului $H_a H_b H_c$ coincide cu cercul înscris în triunghiul $H_a H_b H_c$, adică când triunghiul $H_a H_b H_c$ este echilateral, adică când triunghiul ABC este echilateral.

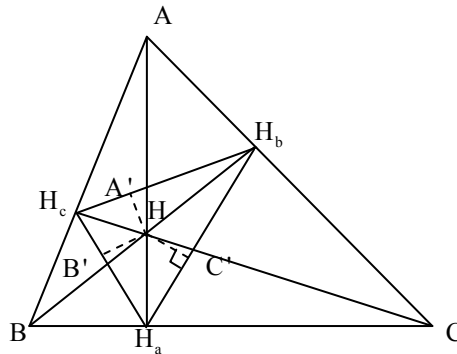


Fig. 363

Teorema lui Nagel

33) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Dreptele AO, BO, CO sunt perpendiculare pe laturile $H_b H_c, H_c H_a, H_a H_b$ ale triunghiului ortic.

Demonstrație. Din $m(\angle AH_c C) = m(\angle AH_a C) = 90^\circ$ rezultă că patrulaterul $ACH_a H_c$ este inscriptibil deci $\angle BH_c H_a \equiv \angle ACB$. Fie D punctul diametral opus lui B în cercul circumscris triunghiului ABC (Fig. 362). Atunci, $m(\angle ABD) = 90^\circ - m(\angle ADB) = 90^\circ - m(\angle ACB) = 90^\circ - m(\angle BH_c H_a)$, de unde $m(\angle ABD) + m(\angle BH_c H_a) = 90^\circ$, adică $BO \perp H_c H_a$. Analog, $AO \perp H_b H_c$ și $CO \perp H_a H_b$.

Observație: Perpendicularele din A, B, C pe $H_b H_c, H_c H_a$, respectiv $H_a H_b$ sunt concurente în punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

34) Fie $H_a H_b H_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC , $H'_a = pr_{AC}(H_a), H''_a = pr_{AB}(H_a)$.

Dreapta $H'_a H''_a$ trece prin mijloacele laturilor $H_a H_b$ și $H_a H_c$.

Demonstrație. Fie A', B', C' mijloacele laturilor $H_b H_c, H_a H_c$ respectiv $H_b H_a$ (Fig. 364). Deoarece $H'_a H''_a$ și $H_b H_c$ sunt antiparalele cu BC rezultă $H'_a H''_a \parallel H_b H_c$, de unde $\angle H'_a H''_a H_b \equiv \angle ABC \equiv \angle H_a H_b C$ și $\angle H_b H_a H'_a \equiv \angle H''_a H'_a H_a$ (complemente la unghiuri congruente). Atunci, $H'_a H''_a$ trece prin mijlocul ipotenuzei $H_a H_b$ a triunghiului

dreptunghic $H_a H'_a H_b$. Cum $H'_a H''_a \square H_b H_c$ rezultă că $H'_a H''_a$ trece și prin mijlocul laturii $H_a H_c$.

Observații:

- 1) Dacă $H'_b = pr_{AB}(H_b), H''_b = pr_{BC}(H_b), H'_c = pr_{BC}(H_c), H''_c = pr_{AB}(H_c)$, atunci dreptele $H'_b H''_b$ și $H'_c H''_c$ trec prin mijloacele laturilor triunghiului ortic al triunghiului ABC .
- 2) Punctele de intersecție dintre dreptele $H'_a H''_a, H'_b H''_b$ și $H'_c H''_c$ determină **triunghiul median** al triunghiului ortic al triunghiului ABC .

35) Dacă H'_a și H''_a, H'_b și H''_b, H'_c și H''_c sunt proiecțiile punctelor H_a, H_b , respectiv H_c pe laturile triunghiului ABC , atunci dreptele $H'_a H''_a, H'_b H''_b$ și $H'_c H''_c$ sunt antiparalele dreptelor BC, CA , respectiv AB .

Demonstrație. Fie $H_a H_b H_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC . Din teorema lui Thales

$$\text{rezultă: } \frac{AH_c}{H_c H''_a} = \frac{AH}{H H_a} \quad (HH_c \square H_a H'_a),$$

$$\frac{AH_b}{H_b H'_a} = \frac{AH}{H H_a} \quad (HH_b \square H_a H'_a), \text{ de unde}$$

$$\frac{AH_c}{H_c H''_a} = \frac{AH_b}{H_b H'_a}, \text{ adică } H_b H_c \square H'_a H''_a. \text{ Cum}$$

$H_b H_c$ este antiparalelă cu BC rezultă că $H'_a H''_a$ este antiparalelă cu BC .

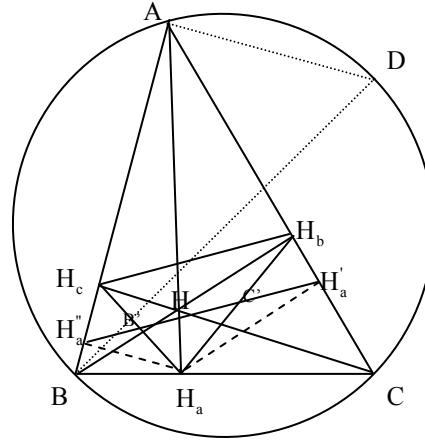


Fig. 364

36) Segmentele $H'_a H''_a, H'_b H''_b, H'_c H''_c$ sunt congruente.

Demonstrație.

$$H'_a H''_a = H'_a C' + C' B' + B' H''_a = \frac{1}{2} H_a H_b + \frac{1}{2} H_b H_c + \frac{1}{2} H_a H_c = p' \quad (\text{unde } p' \text{ este}$$

semiperimetrul triunghiului ortic). Analog, $H'_b H''_b \equiv H'_c H''_c (= 2R \sin A \sin B \sin C)$ (cf. th. (9)).

37) Fie $H_a H_b H_c$ triunghiul ortic corespunzător triunghiului ABC , BB' bisectoarea interioară a unghiului ABC , $B' \in (AC)$ și B'' piciorul bisectoarei unghiului $\square AH_b H_c$. Dreptele $B'B''$ și AB sunt perpendiculare.

Demonstrație. Patrulaterul $BCH_b H_c$ fiind inscriptibil rezultă $\square H_c H_b A \equiv \square ABC$, deci

$$\square B'' H_b A \equiv \square ABB' \left(= \frac{1}{2} m(\square ABC) \right), \text{ adică patrulaterul } BB'' H_b B' \text{ este inscriptibil, de}$$

unde $m(\square BB'' B') = m(\square BH_b B') = 90^\circ$.

38) Fie $H_a H_b H_c$ și $C_a C_b C_c$ triunghiurile ortic, respectiv de contact ale triunghiului ABC . Triunghiul $C_a C_b C_c$ și triunghiul având vârfurile în centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AH_b H_c$, $BH_a H_c$, $CH_a H_b$ au aceeași dreaptă a lui Euler.
Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler”.

39) Fie A'', B'', C'' punctele de intersecție dintre înălțimile triunghiului ABC cu laturile respective ale triunghiului ortic. Triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt ortologice.
Demonstrația este evidentă deoarece $A''H_a \perp BC$, $B''H_b \perp CA$ și $C''H_c \perp AB$, iar $A''H_a \cap B''H_b \cap C''H_c = \{H\}$, al doilea centru de ortologie fiind centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

40) Perpendicularele coborâte din mijloacele laturilor triunghiului ortic ale unui triunghi ABC pe laturile respective ale triunghiului ABC sunt concurente.
Demonstrația rezultă din teorema lui Döttl.

III.2. Triunghiul median

„Geometria e liniștea întâmplării.” – Nichita Stănescu¹⁷⁵

Fie triunghiul ABC și M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, AC, AB . Triunghiul $M_a M_b M_c$ se numește **triunghi median** (sau **auxiliar**) (Fig. 365).

1) Triunghiul median $M_a M_b M_c$ este triunghiul cevian al triunghiului ABC corespunzător centrului de greutate G al triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă deoarece medianele AM_a, BM_b, CM_c sunt concurente în G .

2) Triunghiul median este triunghiul podar al centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrația. Mediatoarele laturilor triunghiului ABC sunt concurente în O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

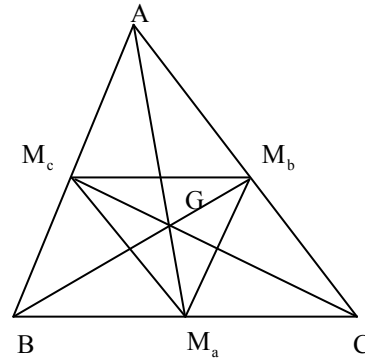


Fig. 365

3) Triunghiul median $M_a M_b M_c$ al triunghiului ABC este asemenea cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Laturile triunghiului median sunt linii mijlocii în triunghiul ABC , deci $\frac{M_a M_b}{AB} = \frac{M_b M_c}{BC} = \frac{M_c M_a}{CA} = \frac{1}{2}$, de unde rezultă că triunghiurile $M_a M_b M_c$ și ABC sunt asemenea.

¹⁷⁵ Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române

Consecințe:

4) **Laturile triunghiului median au lungimile:** $a' = \frac{a}{2}, b' = \frac{b}{2}, c' = \frac{c}{2}$, unde am notat cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA , respectiv AB .

5) **Semiperimetrul triunghiului median este:** $p' = \frac{a' + b' + c'}{2} = \frac{a + b + c}{4} = \frac{p}{2}$.

6) **Măsurile unghiurilor triunghiului median sunt egale cu:**
 $\angle M_a M_b M_c \equiv \angle ABC, \angle M_b M_c M_a \equiv \angle BCA, \angle M_c M_a M_b \equiv \angle CAB$.

7) **Coordonatele baricentrice absolute ale vârfurilor triunghiului median sunt:**
 $M_a \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), M_b \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$ și $M_c \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$.

8) **Triunghiul ABC și triunghiul median corespunzător au același centru de greutate.**

9) **Aria triunghiului median este egală cu o pătrime din aria triunghiului ABC .**

Demonstrație. Avem: $A_{[M_a M_b M_c]} = \frac{1}{4} A_{[ABC]}$, deoarece $\square M_a M_b M_c \equiv \square AM_c M_b \equiv \square M_c B M_a \equiv \square M_b M_a C$.

Cercul înscris în triunghiul median se numește **cercul Spieker**, iar centrul acestui cerc se numește **punctul lui Spieker**.

10) **Raza cercului Spieker este jumătate din raza cercului înscris în triunghiul ABC .**

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Spieker”.

Cercul circumscris triunghiului median se numește **cerc medial** (sau **cercul celor nouă puncte**).

11) **Orice triunghi omotetic cu triunghiul median al unui triunghi ABC în raport cu punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC , este omologic cu triunghiul ABC .**

Demonstrație. Fie $A'B'C'$ triunghiul obținut din triunghiul median $M_a M_b M_c$ prin omotetia de centru O și raport k . Fie $\{T\} = OH \cap AA'$ (Fig. 366). Din asemănarea triunghiurilor AHT și TOA' rezultă: $\frac{TA'}{TA} = \frac{TO}{TH} = \frac{OA'}{AH} = \frac{kOM_a}{2OM_a} = \frac{k}{2}$. Analog, se arată că BB' și CC' trec tot prin punctul T care este centrul de omologie.

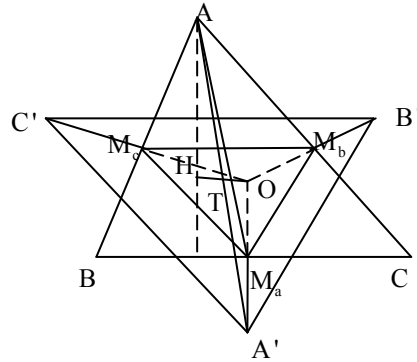


Fig. 366

Observație: Centrul de omologie între triunghiul omotetic și triunghiul median al triunghiului ABC este situat pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .

12) Proiecțiile unui vârf al unui triunghi ABC pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor din celelalte două vârfuri aparțin dreptelor ce trec prin vârfurile triunghiului median $M_a M_b M_c$.

Demonstrație. Fie M , M' și N , N' proiecțiile vârfurilor B și C pe bisectoarea interioară, respectiv exterioară a unghiului A . Deoarece patrulaterul $BMAM'$ este dreptunghi, rezultă că $M_c \in MM'$. Fie $\{P\} = BM' \cap AC$. Triunghiul APB este isoscel deoarece AM' este bisectoare și înălțime, deci M' este mijlocul segmentului BP (Fig. 367). Atunci $M'M_c$ este linie mijlocie în triunghiul APB , deci $M'M_c \parallel AP$, adică $MM' \parallel AC$, de unde rezultă că punctele M și M' aparțin dreptei $M_a M_c$. Analog, se arată că punctele N și N' aparțin dreptei $M_a M_b$.

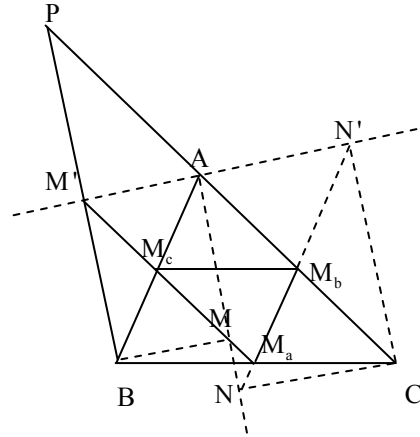


Fig. 367

13) Triunghiul median $M_a M_b M_c$ și triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al unui triunghi ABC sunt omologice.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul tangențial”.

14) Triunghiurile median și antisuplementar ale unui triunghi ABC sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului antisuplementar.

Demonstrație: vezi „Triunghiul antisuplementar”.

15) Triunghiul median al triunghiului cotangent al unui triunghi ABC este omologic cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul cotangent”.

16) Fie $M_a M_b M_c$ triunghiul median al triunghiului ABC și I_a , I_b , I_c centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC . Dreptele $I_a M_a$, $I_b M_b$ și $I_c M_c$ sunt concurente.

Demonstrație. Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$; dreptele care unesc mijloacele laturilor triunghiului ortic corespunzător unui triunghi XYZ cu vârfurile corespunzătoare triunghiului XYZ sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului XYZ (vezi „Triunghiul ortic”), deci dreptele $I_a M_a$, $I_b M_b$, $I_c M_c$ sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului $I_a I_b I_c$.

17) Consecință: Triunghiurile median și antisuplementar ale unui triunghi ABC sunt omologice.

18) Bisectoarele interioare ale unui triunghi ABC intersectează laturile necorespunzătoare ale triunghiului median în șase puncte care determină trei drepte ce trec prin punctele de contact determinate de cercul înscris în triunghiul ABC și laturile triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $\{A_1\} = A_2B_2 \cap BC$, $\{A_2\} = M_aM_c \cap AI$,
 $\{B_2\} = M_bM_c \cap BI$, $\{B_1\} = A_2B_2 \cap AC$, $M_cB_2 \perp BC$,
 $m(\angle M_cB_2B) = m(\angle A_1BB_2) = m(\angle M_cBB_2)$, deci
 triunghiul BM_cB_2 este isoscel, deci
 $B_2M_c = BM_c = \frac{c}{2} = A_2M_c$. Mai mult $M_bB_1 \perp A_2M_c$,
 de unde rezultă că triunghiul $M_bB_1B_2$ este isoscel,
 deci $M_bB_1 = M_bB_2 = \frac{c}{2} - \frac{a}{2}$ (Fig. 368). Atunci,
 $B_1C = \frac{1}{2}(b+c-a) = p-a$, deci B_1 este un punct de
 contact al cercului înscris în triunghiul ABC cu
 latura AC .

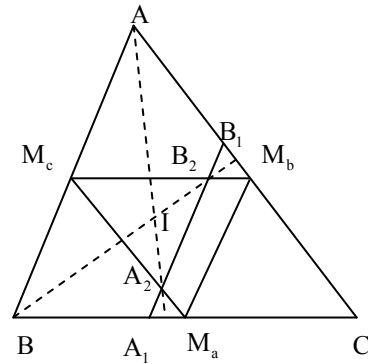


Fig. 368

19) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC , A', B', C' mijloacele segmentelor AO, BO , respectiv CO și $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC . Dreptele $A'M_a, B'M_b$ și $C'M_c$ sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului median.

Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler”.

20) Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC . Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC este adevărată relația: $\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Demonstrație. Teorema medianei scrisă sub formă vectorială aplicată în triunghiul MBC dă: $\overrightarrow{MM_a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$. Analog se obțin egalitățile: $\overrightarrow{MM_b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA})$ și

$\overrightarrow{MM_c} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA})$. Sumând aceste egalități obținem:
 $\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

21) Coordonatele baricentrice ale vârfurilor triunghiului median sunt:

$$M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Demonstrație. Din egalitatea $\overrightarrow{MM_a} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{MC}$ rezultă $M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Analog pentru celelalte vârfuri.

22) **Triunghiul ortic al triunghiului median corespunzător unui triunghi ABC este omologic cu triunghiul ABC .**

Demonstrație. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului median $M_a M_b M_c$ (Fig. 369) și $\{A''\} = AA' \cap BC, \{B''\} = BB' \cap CA, \{C''\} = CC' \cap AB$.

Cum $M_b M_c \perp BC$ rezultă că

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{M_c A'}{M_b A'} = \frac{M_c M_a \cos C}{M_b M_a \cos B} = \frac{b \cos C}{c \cos B}. \quad \text{Analog,}$$

$$\frac{CB''}{AB''} = \frac{c \cos A}{a \cos C} \quad \text{și} \quad \frac{AC''}{BC''} = \frac{a \cos B}{b \cos A}, \quad \text{de unde rezultă că}$$

$$\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{AC''}{BC''} = 1 \quad \text{și din reciproca teoremei lui}$$

Ceva rezultă că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

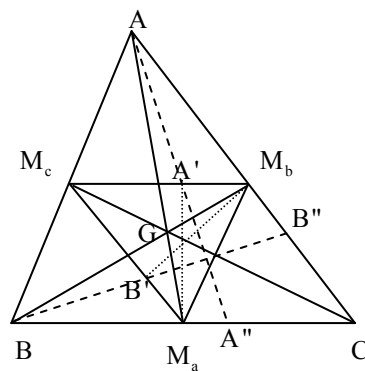


Fig. 369

III.3. Triunghiul de contact

„O cameră fără cărți este un trup fără suflet.” - Pitagora¹⁷⁶

Fie C_a, C_b, C_c punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile triunghiului. Triunghiul $C_a C_b C_c$ se numește **triunghiul de contact** al triunghiului ABC (sau **triunghiul Gergonne**).

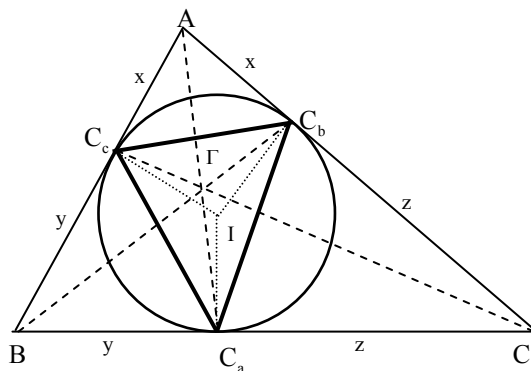


Fig. 370

¹⁷⁶ Pitagora (580-500 î.e.n.) – matematician grec

1) Triunghiul de contact $C_a C_b C_c$ este triunghiul podar corespunzător centrului cercului înscris (I) în triunghiul ABC , în raport cu triunghiul ABC .

2) Unghiurile triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ corespunzător triunghiului ABC au măsurile egale cu: $90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{A})$, $90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{B})$, **respectiv** $90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{C})$.

Demonstrație. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Deoarece patrulateralele BC_aIC_c , $CGIC_a$ sunt inscriptibile rezultă $m(\hat{IC}_aC_b) = m(\hat{IBC}_c) = \frac{1}{2}m(\hat{B})$ și $m(\hat{IC}_aC_b) = m(\hat{ICC}_b) = \frac{1}{2}m(\hat{C})$. Atunci, $m(\hat{C}_cC_aC_b) = m(\hat{C}_cC_aI) + m(\hat{C}_bC_aI) = \frac{1}{2}m(\hat{B}) + \frac{1}{2}m(\hat{C}) = \frac{1}{2}[180^\circ - m(\hat{A})] = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{A})$. Analog se arată că $m(\hat{C}_aC_bC_c) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{B})$ și $m(\hat{C}_aC_cC_b) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{C})$.

3) Lungimile laturilor triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ sunt egale cu:

$$a' = (-a + b + c) \sin \frac{A}{2}, \quad b' = (a - b + c) \sin \frac{B}{2}, \quad c' = (a + b - c) \sin \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. În triunghiul isoscel AC_bC_c avem: $\sin \frac{A}{2} = \frac{a'/2}{p-a}$, unde p reprezintă semiperimetrul triunghiului ABC , deci $a' = (-a + b + c) \sin \frac{A}{2}$. Analog se determină lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului $C_a C_b C_c$.

4) Lungimile laturilor triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ sunt egale cu: $C_b C_c = 2r \cos \frac{A}{2}$,

$$C_c C_a = 2r \cos \frac{B}{2}, \quad C_a C_b = 2r \cos \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul de contact rezultă $\frac{C_b C_c}{\sin(90^\circ - A/2)} = \frac{C_c C_a}{\sin(90^\circ - B/2)} = \frac{C_a C_b}{\sin(90^\circ - C/2)} = 2r$, de unde rezultă concluzia.

5) Consecință: $C_a C_b^2 + C_b C_c^2 + C_c C_a^2 = \frac{2r^2(4R + r)}{R}$.

Demonstrație. $C_a C_b^2 + C_b C_c^2 + C_c C_a^2 = 4r^2 \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right) = \frac{2r^2(4R + r)}{R}$.

6) *Segmentele determinate de punctele de contact ale cercului înscris pe laturile triunghiului ABC au lungimile $p-a, p-b$, respectiv $p-c$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$.*

Demonstrație.

Fie $AC_b = AC_c = x, BC_a = BC_c = y, CC_a = CC_b = z$. Avem: $2(x+y+z) = a+b+c = 2p$ de unde $x+y+z = p$, deci $x = p-a, y = p-b, z = p-c$.

7) *Triunghiul de contact al unui triunghi ABC neisoscel și triunghiul ABC sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Gergonne al triunghiului ABC.*

Demonstrație: vezi „Punctul lui Gergonne”.

8) *Punctul lui Lemoine al triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ al triunghiului ABC coincide cu punctul lui Gergonne al triunghiului ABC.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gergonne”.

9) *Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC. Atunci:*

$$A_{[C_a C_b C_c]} = \frac{abc}{R(a+b+c)} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

Demonstrație. Avem $\frac{A_{[AC_b C_c]}}{A_{[ABC]}} = \frac{AC_c^2}{bc}$, $\frac{A_{[BC_a C_c]}}{A_{[ABC]}} = \frac{(c-AC_c)^2}{ac}$, $\frac{A_{[CC_a C_b]}}{A_{[ABC]}} = \frac{(c-AC_c)^2}{ab}$. Cu

relația $A_{[ABC]} = A_{[C_a C_b C_c]} + A_{[AC_b C_c]} + A_{[BC_a C_c]} + A_{[CC_a C_b]}$ și ținând cont că

$$AC_c = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} \quad \text{sau} \quad AC_c = \frac{r}{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}} \quad \text{rezultă} \quad A_{[C_a C_b C_c]} = \frac{A_{[ABC]}^2}{2pR} = \frac{(pr)^2}{2pR} \quad \text{sau}$$

$$A_{[C_a C_b C_c]} = \frac{abc}{R(a+b+c)} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

Observație: Aria triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ este maximă când triunghiul ABC este

echilateral deoarece $A_{[C_a C_b C_c]} = \frac{pr^2}{2R} \leq \frac{pr^2}{2 \cdot 2r} = \frac{pr}{4} = \frac{A_{[ABC]}}{4}$ (deoarece $R \geq 2r$). Cum relația $R = 2r$ are loc doar în triunghiul echilateral, atunci afirmația este demonstrată.

10) *Aria triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ este egală cu:* $A_{[C_a C_b C_c]} = \frac{A_{[ABC]}^2}{2R \cdot p} = \frac{r}{2R} \cdot A_{[ABC]}.$

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

11) Perpendicularele duse din mijloacele laturilor triunghiului de contact $C_aC_bC_c$ pe laturile opuse ale triunghiului ABC sunt concurente.

Demonstrație. Fie W centrul de greutate al triunghiului $C_aC_bC_c$ și A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului $C_aC_bC_c$. Punctele C_a, C_b, C_c se obțin din punctele A', B', C' printr-o omotetie de centru W și raport (-2) ($\overrightarrow{WC_a} = -2\overrightarrow{WA'}$). Printr-o omotetie o dreaptă se transformă într-o dreaptă paralelă cu cea dată. Atunci, dreapta C_aI se transformă într-o dreaptă d_a ce trece prin A' și este paralelă cu C_aI , deci $d_a \perp BC$. Analog, dreptele IC_b și IC_c se transformă în dreptele d_b, d_c paralele cu IC_b , respectiv IC_c și $B' \in d_b, C' \in d_c$. Cum IC_a, IC_b, IC_c sunt concurente în I , rezultă că dreptele d_a, d_b, d_c sunt concurente și fie S punctul de concurență al lor. Evident, punctul I se transformă prin omotetia de centru W și raport (-2) în punctul S , deci $2SI = WI$.

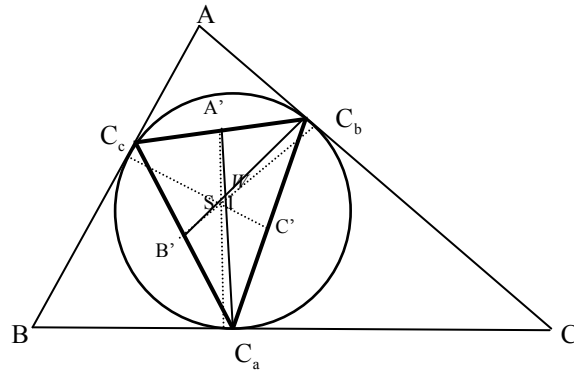


Fig. 371

12) Fie M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, AC respectiv AB ale triunghiului ABC și $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Perpendicularele din punctele M_a, M_b, M_c pe laturile C_bC_c, C_cC_a respectiv C_aC_b sunt concurente.

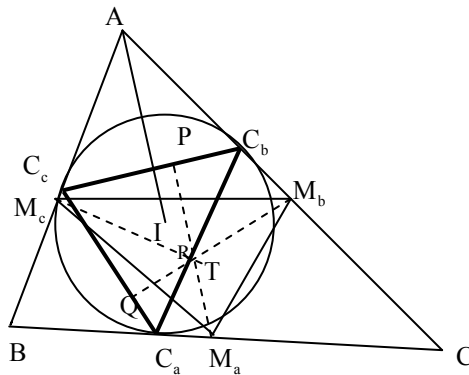


Fig. 372

Demonstrație. Fie P, Q, R picioarele perpendicularelor duse din M_a, M_b respectiv M_c pe laturile triunghiului $C_aC_bC_c$. Deoarece AI este bisectoarea $\angle BAC$ și $C_cA = C_bA$ rezultă $AI \perp C_bC_c$. Cum și $M_aP \perp C_bC_c$ rezultă că $AI \parallel M_aP$. Patrulaterul $M_aM_bAM_c$ este paralelogram, deci $\angle BAC = \angle M_cM_aM_b$ și cum AI este bisectoarea unghiului A rezultă că M_aP este bisectoarea unghiului $\angle M_cM_aM_b$. Analog, se demonstrează că M_bQ și M_cR sunt bisectoarele

unghiurilor $\angle M_aM_bM_c$, respectiv $\angle M_bM_cM_a$. Cum bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente, rezultă că dreptele M_aP, M_bQ și M_cR sunt concurente.

13) Triunghiurile de contact $C_aC_bC_c$ și median $M_aM_bM_c$ corespunzătoare unui triunghi ABC sunt ortologice.

Demonstrația rezultă din proprietatea de mai sus.

14) Triunghiul de contact al triunghiului ABC și primul triunghi Sharygin al triunghiului ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul Sharygin”.

15) Triunghiurile de contact $C_aC_bC_c$ al unui triunghi ABC este omotetic cu triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antisuplementar”.

16) Triunghiul de contact $C_aC_bC_c$ și triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ corespunzătoare unui triunghi ABC au aceeași dreaptă a lui Euler OI .

Demonstrație. Deoarece I este ortocentrul triunghiului $I_aI_bI_c$ și O este centrul cercului medial al triunghiului $I_aI_bI_c$ (vezi „Triunghiul antisuplementar”) rezultă că dreapta OI este dreapta lui Euler a triunghiului $I_aI_bI_c$. Deoarece triunghiurile $I_aI_bI_c$ și $C_aC_bC_c$ sunt omotetice (cf. th. (13)), rezultă că omologul lui I – centrul cercului circumscris triunghiului $C_aC_bC_c$ – este punctul O' – centrul cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$ și evident O' este punct pe dreapta lui Euler (OI) a triunghiului $I_aI_bI_c$, deci centrul omotetiei (Q) aparține dreptei OI . Cum raza cercului circumscris triunghiului ortic unui triunghi are lungimea jumătate din raza cercului triunghiului de referință rezultă că $R = \frac{R'}{2}$ adică $R' = 2R$ (unde R' este raza cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$, triunghiul ABC fiind triunghiul ortic al triunghiului $I_aI_bI_c$). Astfel, $\frac{QO'}{OI} = \frac{2R}{r}$ (adică raportul de omotetie este egal cu $\frac{2R}{r}$), iar punctul I – ortocentrul triunghiului $I_aI_bI_c$ – prin omotetia de centru Q și raport $\frac{2R}{r}$ se transformă în ortocentrul triunghiului $C_aC_bC_c$, care evident aparține dreptei OI adică dreapta OI , adică OI este dreapta lui Euler a triunghiului $C_aC_bC_c$.

17) Triunghiul de contact $C_aC_bC_c$ și triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris în triunghiul ABC sunt omotetice, centrul de omotetie fiind pe dreapta OI .

Demonstrație. Fie A'', B'', C'' mijloacele arcelor $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ respectiv $\widehat{AB}$ (Fig. 373). Cum $OA'' \perp IC_a$, $OB'' \perp IC_b$, $OC'' \perp IC_c$ și $A''C_a \cap B''C_b \cap C''C_c = \{I\}$ rezultă că triunghiurile $A''B''C''$ și $C_aC_bC_c$ sunt omotetice, raportul de omotetie fiind $\frac{R}{r}$, centrul omotetiei aparținând liniei centrelor celor două cercuri, adică dreptei OI . Dacă punctul M este centrul

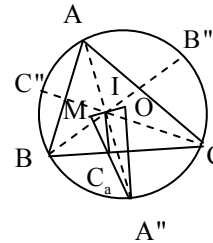


Fig. 373

omotetiei considerate, atunci $MI = \frac{r\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R - r}$ și $MO = \frac{R\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R - r}$ (vezi „Triunghiul circumpedal”).

18) Dreapta lui Simson a punctului lui Feuerbach (φ) al triunghiului ABC , în raport cu triunghiul de contact $C_a C_b C_c$ al triunghiului ABC este paralelă cu dreapta OI
Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Simson”.

19) Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC , I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și $M_a M_b M_c$ triunghiul median al triunghiului ABC . Dreptele $C_b I$, $C_a C_c$ și BM_b sunt concurente.

Demonstrație. Fie H_b piciorul înălțimii din B a triunghiului ABC și $\{M\} = BM_b \cap C_b I$. Din

$MC_b \parallel BH_b$ rezultă $\frac{BM}{MM_b} = \frac{H_b C_b}{C_b M_b}$. Dar

$H_b C_b = p - a - c \cdot \cos A$, $C_b M_b = \frac{b}{2} - (p - a)$, deci

$\frac{BM}{MM_b} = \frac{a - b + c}{b}$. Fie $\{M'\} = C_a C_b \cap BM_b$. Atunci,

$\frac{CC_a}{C_a B} \cdot M_b A + \frac{C_c A}{C_c B} \cdot M_b C = \frac{MM_b}{BM'} \cdot AC$ (vezi „Relația lui Van-Aubel”), adică

$\frac{p - c}{p - b} \cdot \frac{b}{2} + \frac{p - a}{p - b} \cdot \frac{b}{2} = \frac{M' M_b}{BM'} \cdot b$, de unde $\frac{BM'}{M' M_b} = \frac{a - b + c}{b}$, deci $M \equiv M'$.

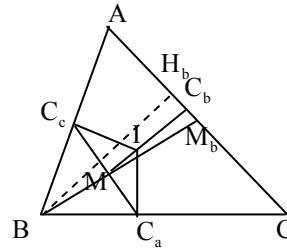


Fig. 374

20) Triunghiul ortic al triunghiului de contact al unui triunghi ABC este omotetic cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie H_1 ortocentrul triunghiului de contact și $C_a A_1, C_b B_1, C_c C_1$ înălțimile triunghiului de contact.

Dar $m(\angle AC_c C_b) = m(\angle AIC_b) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle A) = m(\angle B_1 C_a C_1)$,

iar $m(\angle C_c A_1 B_1) = m(\angle B_1 C_a C_1)$ (deoarece patrulaterul $A_1 B_1 C_a C_b$ este inscriptibil, deci $\angle AC_c C_b \equiv \angle C_c A_1 B_1$, adică $AB \parallel A_1 B_1$. Analog se arată că

$BC \parallel B_1 C_1, AC \parallel A_1 C_1$ și cum triunghiul $C_a C_b C_c$ este ascuțitunghic rezultă că triunghiurile $ABC, A_1 B_1 C_1$ sunt omotetice.

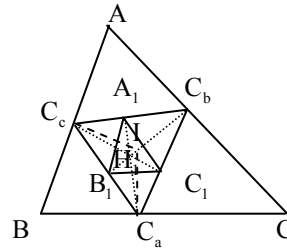


Fig. 375

21) Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al unui triunghi ABC . Dreapta lui Euler a triunghiului $C_a C_b C_c$ trece prin centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler. Dreapta lui Euler”.

III.4. Triunghiul extangential

„Omul pentru care faptul că $2 \cdot 2 = 4$ e de la sine înțeles nu va deveni niciodată mare matematician.” - Bertolt Brecht¹⁷⁷

Fie triunghiul ABC și I_a, I_b, I_c centrele cercurilor A -exînscriș, B -exînscriș, respectiv C -exînscriș corespunzătoare triunghiului ABC . Tangentele comune cercurilor exînscrișe

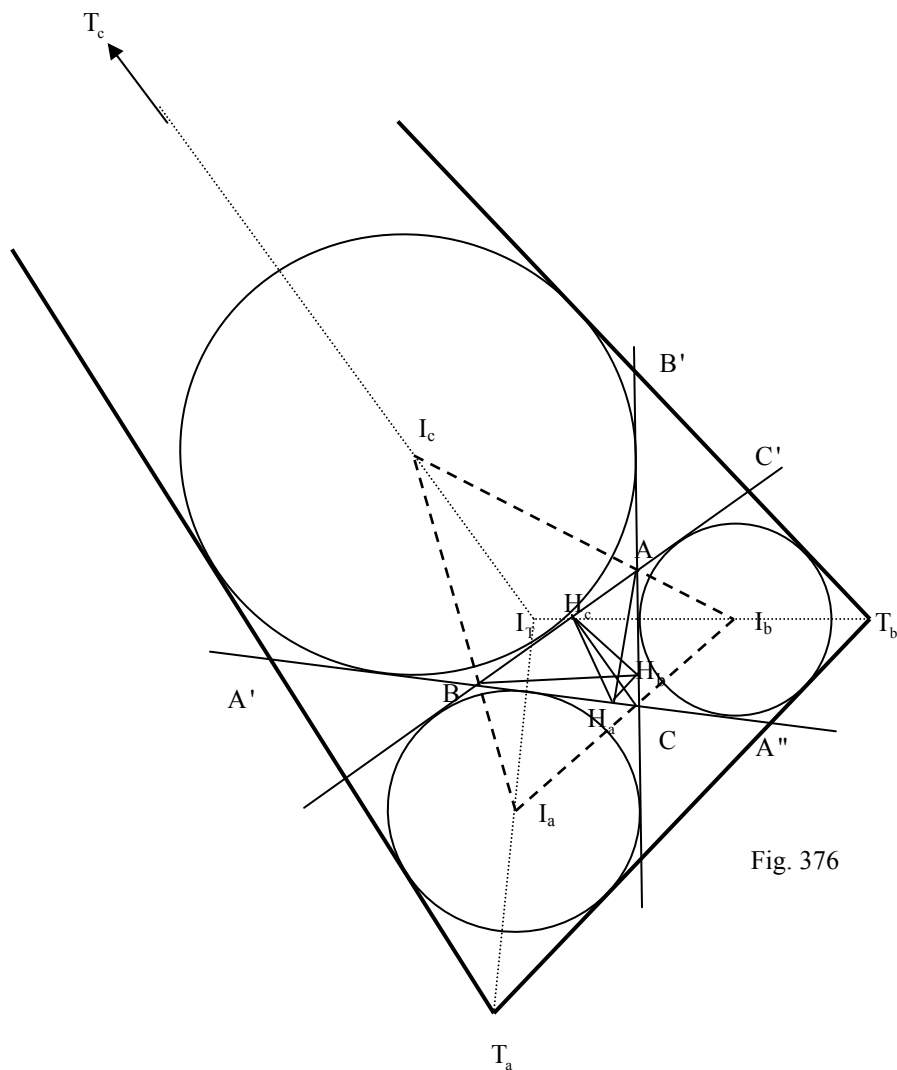


Fig. 376

(diferite de dreptele ce conțin laturile triunghiului ABC) determină triunghiul $T_a T_b T_c$ numit **triunghiul extangential** al triunghiului ABC (Fig. 376). Cercul circumscris triunghiului extangential se numește **cercul extangential**.

¹⁷⁷ Bertolt Brecht (1898-1956) – poet german

1) Triunghiul extangențial $T_aT_bT_c$ corespunzător triunghiului ABC este omotetic cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $\{C'\} = BA \cap T_bT_c$ și $\{B'\} = AC \cap T_bT_c$. Din congruența triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ rezultă că $\square ACB \equiv \square AC'B'$. Dar H_aH_b este antiparalelă laturii BC , deci $\square AH_cH_b \equiv \square ACB$, de unde rezultă $\square B'C'A \equiv \square AH_cH_b$ și $B'C' \parallel H_cH_b$, adică $T_cT_b \parallel H_cH_b$. Analog se arată că $T_cT_a \parallel H_cH_a$ și $T_aT_b \parallel H_aH_b$. Avem $m(\square H_aH_bH_c) = 180^\circ - 2m(\square A)$. Fie $\{A'\} = BC \cap T_aT_c$ și $\{A''\} = BC \cap T_aT_b$. Atunci, $\square H_cH_aA' \equiv \square H_aA'T_a (= m(\square BAC))$ și $\square H_bH_aC \equiv \square H_aA''T_a (= m(\square BAC))$ (alterne interne), de unde rezultă $m(\square T_cT_aT_b) = 180^\circ - 2m(\square A)$, deci $\square H_cH_aH_b \equiv \square T_cT_aT_b$. Analog, $\square H_cH_bH_a \equiv \square T_cT_bT_a$, unde rezultă că triunghiurile $T_aT_bT_c$ și $H_aH_bH_c$ sunt asemenea și deoarece au și laturile respective paralele rezultă că sunt omotetice.

Observație: Centrul de omotetie dintre triunghiurile $T_aT_bT_c$ și $H_aH_bH_c$ se numește **punctul lui Clawson**.

2) Triunghiurile extangențial $T_aT_bT_c$ și antisuplementar $I_aI_bI_c$ corespunzătoare unui triunghi ABC sunt omologice.

Demonstrația este evidentă deoarece dreptele I_aT_a, I_bT_b, I_cT_c sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghiul $T_aT_bT_c$, fiind bisectoare în triunghiul extangențial.

3) Centrul cercului înscris în triunghiul extangențial coincide cu centrul cercului triunghiului antisuplementar.

Demonstrație. Fie I_T centrul cercului înscris în triunghiul $T_aT_bT_c$; conform proprietății precedente rezultă: $\{I_T\} = I_aT_a \cap I_bT_b \cap I_cT_c$. Avem: $m(\square T_aI_TT_c) = 180^\circ - [m(\square T_cT_aI_T) + m(\square T_aT_cI_T)] = 180^\circ - [(90^\circ - m(\square A)) + (90^\circ - m(\square C))] = 180^\circ - m(\square B) = 2m(\square I_aI_bI_c)$. Analog se arată că $m(\square T_aI_TT_b) = 2m(\square I_aI_bI_c)$ și $m(\square T_cI_TT_b) = 2m(\square I_bI_aI_c)$, deci I_T este centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$.

Observație: Cum I_T este centrul cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$ rezultă că $I_TI_a \equiv I_TI_b \equiv I_TI_c$.

4) Raza cercului înscris în triunghiul extangențial corespunzător unui triunghi ABC , are lungimea egală cu $2R + r$, unde R și r sunt razele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie $\{B'\} = AB \cap T_bT_c$ și $\{C'\} = AC \cap T_bT_c$. Deoarece triunghiurile ABC și $AB'C'$ sunt congruente (vezi „Cercuri exînscrise”) rezultă că raza cercului înscris în triunghiul $AB'C'$ este egală cu r . Fie I' centrul cercului înscris în triunghiul $AB'C'$. Atunci, distanțele de la A și I' la $B'C'$ sunt egale cu h_a (înălțimea din vârful A a

triunghiului ABC) și r . Cum A este mijlocul segmentului II' , atunci distanța de la I la $B'C'$ este egală cu $2h_a - r$. Fie I_T simetricul lui I față de O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Distanțele de la I și O la T_bT_c sunt egale cu $2h_a - r$, respective $h_a + R$ (deoarece $AO = R$), deci distanța de la I_T la T_bT_c este egală cu

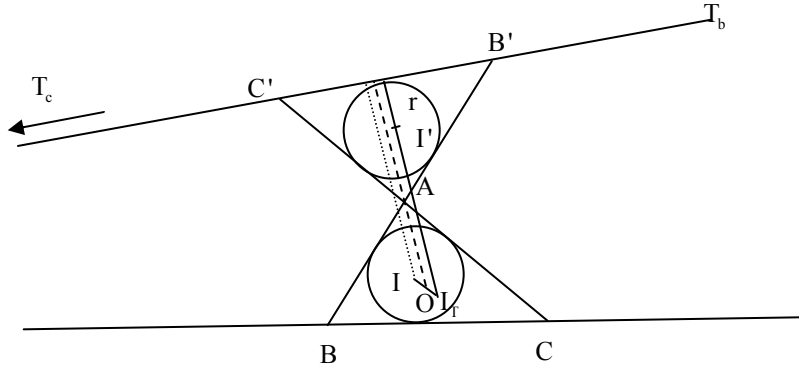


Fig. 377

$2(R + h_a) - (2h_a - r) = 2R + r$ (unde am aplicat teorema liniei mijlocii într-un trapez). Analog, se arată că distanțele de la punctul I_T la T_aT_c și sunt egale tot cu $2R + r$, deci I_T este centrul cercului înscris în triunghiul extangential.

Observație: Deoarece $4R + 2r = r + r_a + r_b + r_c$ rezultă că raza cercului înscris în triunghiul extangential este egală cu $r_T = 2R + r = \frac{1}{2}(r + r_a + r_b + r_c)$.

5) Centrul cercului înscris în triunghiul extangential al unui triunghi ABC este simetricul centrului cercului înscris în triunghiul ABC , față de centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Proprietatea este o consecință a aplicației precedente.

6) Triunghiurile extangential și tangential corespunzătoare unui triunghi ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Deoarece triunghiurile extangential $T_aT_bT_c$ și tangential $T_AT_BT_C$ sunt omotetice cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC , iar relația de omotetie fiind tranzitivă, rezultă că și triunghiurile $T_aT_bT_c$ și $T_AT_BT_C$ sunt omotetice.

Observație: Din omotetia triunghiurilor $T_aT_bT_c$ și $T_AT_BT_C$ rezultă că cercurile înscrise în aceste triunghiuri sunt omotetice, deci raportul de omotetie este egal cu $\frac{2R+r}{R}$, unde $2R+r$ și R sunt lungimile razelor cercurilor înscrise în triunghiurile $T_aT_bT_c$ respectiv $T_AT_BT_C$.

7) Triunghiul neisoscel ABC este omologic cu triunghiul său extangential.

Demonstrație. Fie $\{A_1\} = T_b T_c \cap BC, \{B_1\} = T_a T_c \cap AC, \{C_1\} = T_a T_b \cap AB$. Din teorema bisectoarei exterioare rezultă: $\frac{A_1 B}{A_1 C} = \frac{c}{b}, \frac{B_1 C}{B_1 A} = \frac{a}{c}$ și $\frac{C_1 A}{C_1 B} = \frac{b}{a}$. Atunci, $\frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{B_1 C}{B_1 A} \cdot \frac{C_1 A}{C_1 B} = 1$ și din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare, iar din reciproca teoremei lui Desargues rezultă că triunghiurile ABC și $T_a T_b T_c$ sunt omologice, dreapta de omologie fiind axa antiotică a triunghiului ABC .

III.5. Triunghiul cotangentic

„Adevărul matematic indiferent unde, la Paris sau la Toulouse, este unul și același.” – Blaise Pascal¹⁷⁸

Triunghiul $\tau_a \tau_b \tau_c$ care are ca vârfuri punctele de tangență dintre laturile BC, CA și AB ale unui triunghi ABC cu cercurile exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC , se numește **triunghiul cotangentic** corespunzător triunghiului ABC .

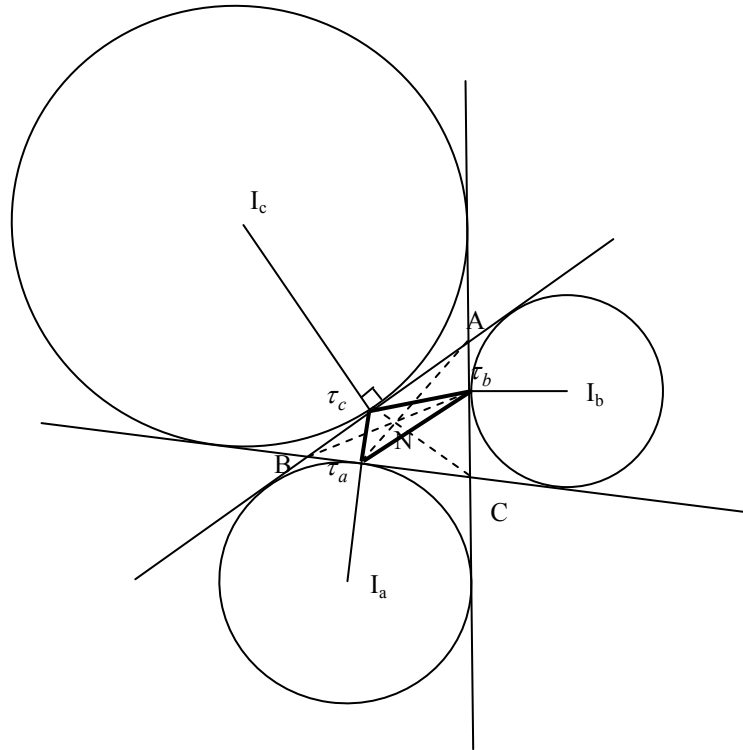


Fig. 378

¹⁷⁸ Blaise Pascal (1623 – 1662) – matematician, fizician și filosof francez, contribuții în geometria proiectivă, algebră și teoria probabilităților

1) Dreptele $A\tau_a, B\tau_b, C\tau_c$ sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Nagel”.

2) Triunghiul cotangent $\tau_a\tau_b\tau_c$ este triunghiul cevian al punctului lui Nagel în raport cu triunghiul ABC .

3) Triunghiul cotangent $\tau_a\tau_b\tau_c$ este triunghiul podar al punctului lui Bevan al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Bevan”.

4) Laturile triunghiului cotangent $\tau_a\tau_b\tau_c$ al triunghiului ABC au lungimile egale cu:

$$\tau_b\tau_c = \sqrt{(p-b)^2 + (p-c)^2 - 2(p-b)(p-c)\cos A},$$

$$\tau_c\tau_a = \sqrt{(p-c)^2 + (p-a)^2 - 2(p-c)(p-a)\cos B},$$

$$\tau_a\tau_b = \sqrt{(p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b)\cos C}.$$

Demonstrație. În triunghiul $A\tau_b\tau_c$, din teorema cosinusului rezultă

$$\tau_b\tau_c^2 = A\tau_b^2 + A\tau_c^2 - 2A\tau_b \cdot A\tau_c \cdot \cos A, \text{ adică } \tau_b\tau_c = \sqrt{(p-b)^2 + (p-c)^2 - 2(p-b)(p-c)\cos A}.$$

Analog se determină lungimile laturilor $\tau_b\tau_a$ și $\tau_a\tau_c$.

5) Aria triunghiului cotangent este egală cu $A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]} = \frac{1}{2pR} \cdot A_{[ABC]}^2$, unde R este

raza cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație.

$$\text{Avem } \frac{A_{[A\tau_b\tau_c]}}{A_{[ABC]}} = \frac{A\tau_c \cdot A\tau_b \cdot \sin A}{AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \text{ și analoagele. Dar}$$

$$A_{[ABC]} = A_{[A\tau_b\tau_c]} + A_{[B\tau_a\tau_c]} + A_{[C\tau_a\tau_b]} + A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]} \text{ adică,}$$

$$\frac{A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]}}{A_{[ABC]}} = 1 - \frac{(p-b)(p-c)}{bc} - \frac{(p-a)(p-c)}{ac} - \frac{(p-a)(p-b)}{ab} \text{ și de aici rezultă}$$

$$A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4abc} \cdot A_{[ABC]} = \frac{2r^2 p}{abc} \cdot A_{[ABC]} = \frac{A_{[ABC]}^2}{2pR}.$$

Observație: Aria triunghiului cotangent este egală cu aria triunghiului de contact.

6) Aria triunghiului cotangent este maximă când triunghiul ABC este echilateral.

Demonstrație. Avem $A_{[\tau_a \tau_b \tau_c]} = \frac{pr^2}{2R} \leq \frac{pr^2}{2 \cdot 2r} = \frac{pr}{4} = \frac{A_{[ABC]}}{4}$ (deoarece $R \geq 2r$). Cum relația $R = 2r$ are loc doar în triunghiul echilateral rezultă că aria triunghiului cotangent este maximă atunci când triunghiul ABC este echilateral.

7) Triunghiul neisoscel ABC și triunghiul său cotangent $\tau_a \tau_b \tau_c$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Nagel al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $A\tau_a \cap B\tau_b \cap C\tau_c = \{N\}$, unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC rezultă că triunghiurile ABC și $\tau_a \tau_b \tau_c$ sunt omologice (consecință a teoremei lui Desargues).

8) Triunghiul median al triunghiului cotangent al unui triunghi ABC este omologic cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie A', B', C' mijloacele laturilor $\tau_b \tau_c, \tau_a \tau_c$, respectiv $\tau_a \tau_b$ ale triunghiului cotangent și $\{A''\} = AA' \cap BC$, $\{B''\} = BB' \cap AC$, $\{C''\} = CC' \cap AB$ (Fig. 379). Considerând ceviana AA'' și transversala $\tau_b \tau_c$ avem:

$$\frac{A\tau_c}{AB} \cdot \frac{AC}{A\tau_b} \cdot \frac{A'\tau_b}{A'\tau_c} \cdot \frac{A''B}{A''C} = 1 \quad (\text{vezi „Relația lui Van-} \\ \text{Aubel”}), \text{ deci } \frac{p-b}{c} \cdot \frac{b}{p-c} \cdot 1 \cdot \frac{A''B}{A''C} = 1 \text{ de unde}$$

$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{c(p-b)}{b(p-c)}. \quad \text{Analog, } \frac{B''C}{B''A} = \frac{a(p-a)}{c(p-c)} \text{ și}$$

$$\frac{C''A}{C''B} = \frac{b(p-b)}{a(p-a)}, \text{ de unde } \frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1 \text{ și din}$$

reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente, deci triunghiurile ABC și $\tau_a \tau_b \tau_c$ sunt omologice.

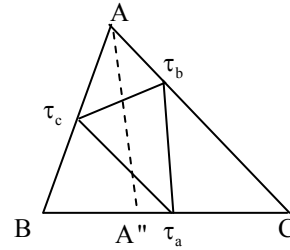


Fig. 379

9) Fie A', B', C' punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C ale triunghiului ABC în cercul circumscris. Dreptele $I_a A', I_b B', I_c C'$ sunt respectiv perpendiculare pe laturile triunghiului cotangent al triunghiului ABC .

Demonstrație. Notăm cu z_x afixul punctului X . Alegem un reper complex cu vârful în centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC , iar punctul A situat pe axa imaginară. Atunci $z_A = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $z_{A'} = -i\alpha$. Din $BA' \perp AB$ și $CA' \perp CA$ rezultă că există $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\frac{z_{A'} - z_B}{z_A - z_B} = i\beta \quad \text{și} \quad \frac{z_{A'} - z_C}{z_A - z_C} = i\gamma, \quad \text{de unde}$$

$$z_B = \frac{2\alpha\beta}{1+\beta^2} - i\alpha \quad \text{și} \quad z_C = \frac{2\alpha\gamma}{1+\gamma^2} - i\alpha \quad (1).$$

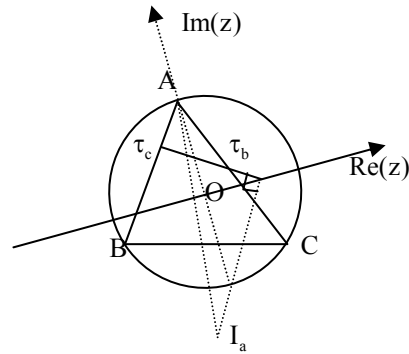


Fig. 380

Deoarece $\frac{\tau_b C}{\tau_b A} = \frac{p-a}{p-c}$ și $\frac{\tau_c A}{\tau_c B} = \frac{p-b}{p-a}$ rezultă $z_{\tau_b} = \frac{z_C(p-c) + z_A(p-a)}{b}$ și

$$z_{\tau_c} = \frac{z_A(p-a) + z_B(p-b)}{c}, \quad \text{deci} \quad z_{\tau_b} = \frac{2\alpha\gamma(p-c)}{(1+\gamma^2) \cdot b} + \frac{i\alpha(c-a)}{b} \quad \text{și}$$

$$z_{\tau_c} = \frac{2\alpha\beta(p-b)}{(1+\beta^2) \cdot c} + \frac{i\alpha(b-a)}{c} \quad (2). \text{ Fie } \{T\} = CI_a \cap AB. \text{ Din teorema bisectoarei exterioare}$$

avem $\frac{TA}{TB} = \frac{b}{a}, \frac{CI_a}{I_a T} = \frac{BC}{BT}$. Astfel $TB = \frac{ac}{b-a}, \frac{CI_a}{I_a T} = \frac{b-a}{c}$, de unde $z_T = \frac{az_A + bz_B}{a+b}$ și

$$z_{I_a} = \frac{z_C + \frac{b-a}{c} \cdot z_T}{1 + \frac{b-a}{c}} = \frac{cz_C + (b-a)z_T}{b+c-a} \quad (3). \text{ Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă } \frac{z_{I_a} - z_{A'}}{z_{\tau_b} - z_{\tau_c}} = i \cdot \theta,$$

unde $\theta \in \square^*$, deci $I_a A' \perp \tau_b \tau_c$. Analog se arată că $I_b B' \perp \tau_a \tau_c$ și $I_c C' \perp \tau_a \tau_b$.

III.6. Triunghiul antipodar

„Am fost un lucrător conștiincios, nu am fost superficial, am muncit până acum la bătrânețe. Spiritul meu a fost geometric, m-a fermecat varietatea și frumusețea figurii.”
– Alexandru Miller¹⁷⁹

Fie P un punct în planul unui triunghi ABC . Triunghiul $A'B'C'$ format de perpendicularele duse prin vârfurile A, B, C pe cevienele PA, PB respectiv PC , se numește **triunghiul antipodar** al punctului P (Fig. 381). Punctul P se numește **punct antipodar**.

1) Triunghiul ABC este triunghiul podar al punctului P în triunghiul $A'B'C'$.

2) Triunghiul antipodar al ortocentrului H al triunghiului ABC este triunghiul anticomplementar.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul anticomplementar”.

3) Triunghiul antipodar al centrului cercului înscris în triunghiul ABC este triunghiul antisuplementar corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antisuplementar”.

4) Triunghiul antipodar al centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC este triunghiul tangențial corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul tangențial”.

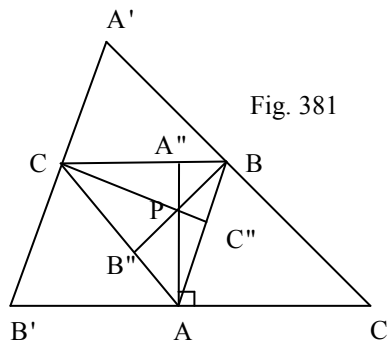


Fig. 381

¹⁷⁹ Alexandru Miller (1879-1965) – matematician român, membru al Academiei Române

5) Triunghiul antipodar al unui punct P este ortologic cu triunghiul pedal al punctului P în raport cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie $A''B''C''$ triunghiul pedal corespunzător punctului P în raport cu triunghiul ABC (Fig. 381). Deoarece $A''A \perp B'C'$, $B''B \perp A'C'$, $C''C \perp A'B'$ și $A''A \cap B''B \cap C''C = \{P\}$ rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt ortologice.

6) Triunghiul antipodar unui punct P este ortologic cu triunghiul anticevian al punctului P .

Demonstrație. Triunghiul anticevian al punctului P este triunghiul ABC . Cum $AP \perp B'C'$, $BP \perp A'C'$, $CP \perp A'B'$, $AP \cap BP \cap CP = \{P\}$ rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt ortologice.

7) Fie L, M, N punctele diametral opuse vârfurilor A, B , respectiv C ale unui triunghi ABC , în cercul circumscris acestuia. Triunghiul LMN este omologic cu triunghiul antipodar al oricărui punct P aflat în interiorul triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie l, m, n dreptele ce trec prin A, B, C și sunt perpendiculare pe dreptele PA, PB respectiv PC și D, E, F al doilea punct de intersecție dintre dreptele l, m, n și cercul circumscris triunghiului ABC (Fig. 382). Deoarece $m(\angle ADL) = 90^\circ$ rezultă $PA \perp DL$. Dacă $\{Q\} = PO \cap DL$, din congruența triunghiurilor APO și LQO rezultă $PO \equiv OQ$. Analog, se arată că dreptele EM, FN trec prin Q , de unde rezultă că $QD \cdot QL = QE \cdot QM = QF \cdot QN = p^2$ relații ce arată că punctele L, M și N sunt polii dreptelor l, m și n în raport cu cercul având centrul în Q și raza p .

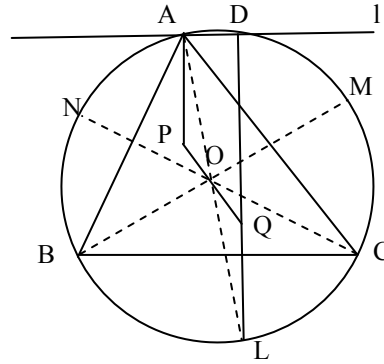


Fig. 382

8) Triunghiul antipodar al unui punct P și triunghiul podar al izogonalului său P' sunt omotetice.

Demonstrație. Fie $A''B''C''$ triunghiul podar al lui P' . Deoarece $B''C'' \perp AP$ (vezi „Drepte izogonale”) și $B'C' \perp AP$ rezultă $B'C' \parallel B''C''$ (Fig.383). Analog, $A'B' \parallel A''B''$ și $A'C' \parallel A''C''$. Deoarece patrulaterul $PBA'C$ este inscriptibil rezultă $m(\angle BA'C) = 180^\circ - m(\angle BPC) = m(\angle PBC) + m(\angle PCB) = m(\angle P'BA) + m(\angle P'CB'') = m(\angle C''A''P') + m(\angle P'A''B'') = m(\angle C''A''B'')$. Deci $\angle C'A'B' \equiv \angle C''A''B''$ și analog $\angle A'B'C' \equiv \angle A''B''C''$, de unde rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt asemenea. Deoarece triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ au laturile paralele și sunt asemenea rezultă că ele sunt omotetice.

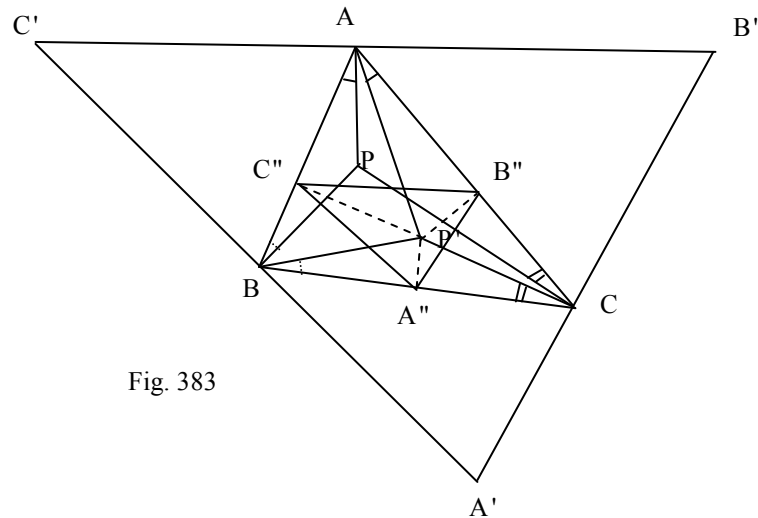


Fig. 383

9) Triunghiurile antipodare ale punctelor lui Fermat corespunzătoare unui triunghi ABC sunt echilaterale.

Demonstrație. Fie F_1 primul punct al lui Fermat - Toricelli. Deoarece $m(\angle AF_1B) = m(\angle BF_1C) = m(\angle CF_1A) = 120^\circ$ (vezi „Punctele lui Fermat”), iar patrulateralele BF_1AC' , CF_1BA' și AF_1CB' sunt inscriptibile, rezultă că $m(\angle BA'C) = m(\angle CB'A) = m(\angle AC'B) = 60^\circ$, deci triunghiul $A'B'C'$ este echilateral. Analog se arată că și triunghiul antipodar al celui de-al doilea punct Fermat (F_2) este echilateral.

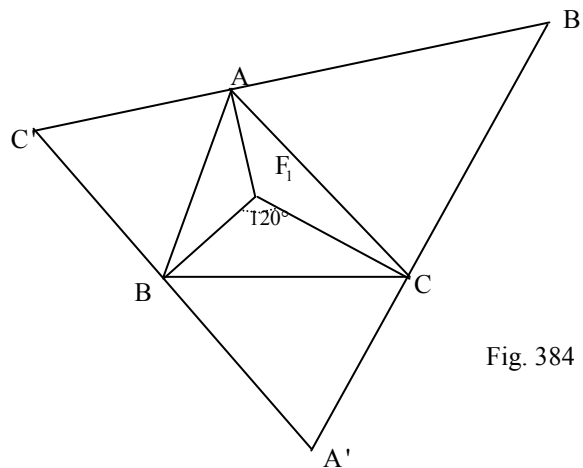


Fig. 384

III.7. Triunghiul podar

„Matematica este știința despre raporturile între formule, lipsite de oricare conținut.” - David Hilbert¹⁸⁰

Fie P un punct interior triunghiului ABC . Se numește **triunghi podar** al punctului P , triunghiul $A'B'C'$ care are ca vârfuri picioarele perpendicularelor duse din P pe laturile triunghiului ABC (Fig. 385). Punctul P se numește **punct podar**. Cercul circumscris triunghiului podar al punctului P se numește **cercul podar** al punctului P . Dacă punctul P aparține unei laturi a triunghiului, atunci dreapta care unește picioarele perpendicularelor din P pe celelalte două laturi ale triunghiului se numește **dreaptă podară**.

1) Punctul podar P aparține cercurilor circumscrise patruleterelor $AB'PC'$, $BC'PA'$, $CA'PB'$.

Demonstrația este evidentă, deoarece patruleterele $AB'PC'$, $BC'PA'$, $CA'PB'$ sunt inscriptibile.

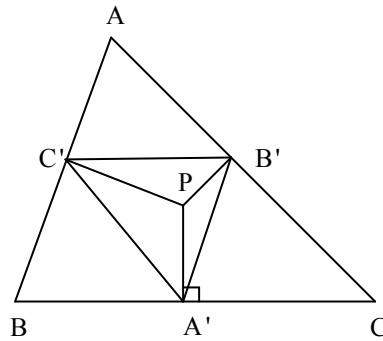


Fig. 385

2) Dacă x, y, z sunt distanțele de la punctul podar P la vârfurile triunghiului ABC , atunci laturile triunghiului podar au lungimile $a' = \frac{ax}{2R}$, $b' = \frac{by}{2R}$, $c' = \frac{cz}{2R}$ (a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC și R raza cercului circumscris triunghiului ABC).

Demonstrație. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile $AC'B'$ și ABC ne dă:

$$\frac{B'C'}{\sin A} = AP \text{ și } \frac{a}{\sin A} = 2R, \text{ de unde rezultă } B'C' = a \cdot \frac{AP}{2R}. \text{ Analog, } C'A' = b \cdot \frac{BP}{2R} \text{ și } A'B' = c \cdot \frac{CP}{2R}.$$

Observație: Dacă $x = y = z$ atunci punctul P coincide cu centrul cercului circumscris ABC și deci $x = R$.

3) Triunghiul podar $A'B'C'$ al unui punct P și triunghiul ABC sunt ortologice.

Demonstrația rezultă din definiția triunghiurilor ortologice.

¹⁸⁰David Hilbert (1862-1943) – matematician german, profesor la Universitatea din Göttingen, contribuții remarcabile în geometrie și analiza matematică

4) Triunghiul podar al centrului cercului circumscris triunghiului ABC este triunghiul median al triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă.

5) Triunghiul podar al ortocentrului triunghiului ABC este triunghiul ortic al triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă.

6) Cercul lui Euler este cercul podar al ortocentrului triunghiului ABC (sau al centrului cercului circumscris triunghiului ABC).

Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler”.

7) Triunghiul podar al centrului cercului înscris este triunghiul de contact al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul de contact”.

8) Cercul podar al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC este cercul înscris în triunghiul ABC .

Demonstrația este evidentă.

9) Triunghiurile podare ale punctelor Brocard ale triunghiului ABC sunt congruente.

Demonstrație. Vezi „Punctele lui Brocard”.

10) Triunghiurile podare ale punctelor izodinamice ale triunghiului ABC sunt echilaterale.

Demonstrație. Vezi „Punctele izodinamice”.

11) Punctul lui Lemoine al triunghiului ABC este centrul de greutate al propriului triunghi podar.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Lemoine”.

12) Teorema celor 6 puncte

Fie P' și P'' două puncte izogonale în raport cu triunghiul ABC și $A'B'C'$ și $A''B''C''$ triunghiurile lor podare în raport cu triunghiul ABC . Punctele $A', B', C', A'', B'', C''$ sunt conciclice.

Demonstrație. Vezi „Drepte izogonale”.

Observație: Centrul cercului pe care se găsesc punctele $A', B', C', A'', B'', C''$ este mijlocul segmentului $P'P''$ (vezi „Drepte izogonale”).

13) Fie P un punct nesituat pe cercul circumscris al unui triunghi ABC și $A'B'C'$ triunghiul podar al lui P în raport cu triunghiul ABC . Perpendicularele din A, B, C pe $B'C', A'C'$ respectiv $A'B'$ sunt concurente într-un punct P' , izogonalul punctului P în raport cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Vezi „Drepte izogonale”.

14) Teorema lui Oppenheim

Al treilea triunghi podar este asemenea cu triunghiul original.

Demonstrație. Punctul P aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1 , $A_2B_1C_2$, $A_3B_2C_3$ și $A_3B_2C_3$ (Fig. 386). Avem:

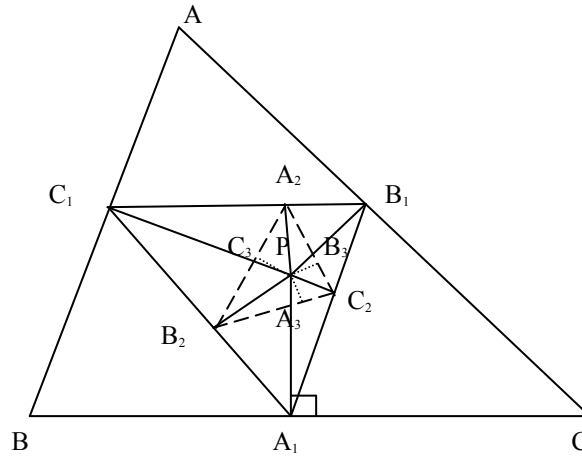


Fig. 386

$m(\angle C_1AP) = m(\angle C_1B_1P) = m(\angle A_2B_1P) = m(\angle A_2C_2P) = m(\angle B_3C_2P) = m(\angle B_3A_3P)$,
 $m(\angle PAB_1) = m(\angle PC_1B_1) = m(\angle PC_1A_2) = m(\angle PB_2A_2) = m(\angle PB_2C_3) = m(\angle PA_3C_3)$ de unde
 rezultă că $m(\angle BAC) = m(\angle B_3A_3C_3)$. Analog se arată că $m(\angle BCA) = m(\angle B_3C_3A_3)$, de
 unde rezultă că triunghiurile ABC și $A_3B_3C_3$ sunt asemenea.

15) Triunghiul podar al unui punct P în raport cu un triunghi ABC este asemenea cu triunghiul circumpedal al punctului P .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul circumpedal”.

16) Triunghiul podar al ortocentrului triunghiului ABC este omotetic cu triunghiul tangențial al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul tangențial”.

17) Aria triunghiului podar $P_aP_bP_c$ al unui punct P în raport cu un triunghi ABC este

egală cu $\frac{|R^2 - OP^2|}{2} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, unde

R reprezintă lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC și O centrul cercului circumscris acestui triunghi.

Demonstrație. Fie D al doilea punct de intersecție dintre dreapta AP și cercul circumscris triunghiului ABC . Avem:

$m(\angle DBC) = m(\angle DAC) = m(\angle PP_cP_b)$ și
 $m(\angle PBP_a) = m(\angle P_aP_cP)$ de unde rezultă că

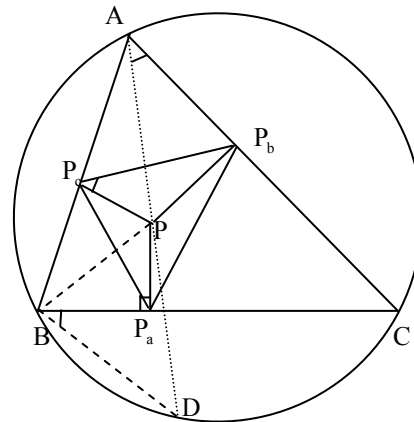


Fig. 387

$m(\angle DBP) = m(\angle P_a P_c P_b)$. Din teorema sinusurilor în triunghiul BPD avem:
 $\frac{\sin \angle PBD}{PD} = \frac{\sin \angle BDP}{BP} = \frac{\sin \angle ACB}{BP}$ (1) (unde am folosit faptul că $\angle BDP \equiv \angle ACB$). Deoarece PC este diametru în cercul circumscris patrulaterului $PP_a CP_b$ avem $P_a P_b = PC \cdot \sin \angle ACB$ și analog se obțin relațiile $P_b P_c = PA \cdot \sin \angle A$, $P_a P_c = PB \cdot \sin \angle B$ (2). Din relațiile (1) și (2):

$$A_{[P_a P_b P_c]} = \frac{P_a P_c \cdot P_b P_c \cdot \sin \angle P_a P_c P_b}{2} \text{ sau } A_{[P_a P_b P_c]} = \frac{PB \cdot PA \cdot \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle DBP}{2} =$$

$$\frac{PA \cdot PD \cdot \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C}{2}$$
. Utilizând puterea punctului față de un cerc rezultă
 $PA \cdot PD = |R^2 - OP^2|$ și atunci $A_{[P_a P_b P_c]} = \frac{|R^2 - OP^2|}{2} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

Observații:

1) Ținând cont că $A_{[ABC]} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ relația precedentă devine:

$$A_{[P_a P_b P_c]} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]}.$$

2) Dacă $P \equiv O$, atunci aria triunghiului podar al centrului cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $A_{[O_a O_b O_c]} = \frac{1}{4} \cdot A_{[ABC]}$, ($O_a O_b O_c$ este de fapt triunghiul median al triunghiului ABC).

3) Dacă $P \equiv G$, atunci aria triunghiului podar al centrului de greutate al triunghiului ABC

este egală cu $A_{[G_a G_b G_c]} = \frac{|R^2 - OG^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \cdot \frac{1}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36R^2} \cdot A_{[ABC]}$.

4) Dacă $P \equiv H$, atunci aria triunghiului podar al ortocentrului triunghiului ABC devine:

$$A_{[H_a H_b H_c]} = \frac{|R^2 - OH^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{|R^2 - [9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{|8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]}$$

5) Dacă $P \equiv I$, atunci aria triunghiului de contact este egală cu:

$$A_{[I_a I_b I_c]} = \frac{|R^2 - OI^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{2Rr}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{r}{2R} \cdot A_{[ABC]}.$$

6) Dacă $P \equiv K$, atunci aria triunghiului podar al punctului simedian al triunghiului ABC este egală cu

$$A_{[K_a K_b K_c]} = \frac{|R^2 - OK^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{3a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{3a^2 b^2 c^2}{4R^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2} \cdot A_{[ABC]}.$$

7) Dacă notăm lungimile segmentelor PP_a , PP_b , PP_c cu x , y respectiv z atunci

$$A_{[P_a P_b P_c]} = A_{[PP_b P_c]} + A_{[PP_c P_a]} + A_{[PP_a P_b]} = \frac{yz \sin A + xz \sin B + xy \sin C}{2}.$$

18) Fie P un punct ce variază pe un cerc $\mathcal{C}$ ce are centrul în punctul O - centrul cercului circumscriș unui triunghi ABC . Triunghiurile podare ale punctelor de pe centrul $\mathcal{C}$, în raport cu triunghiul ABC , au aceeași arie.

Demonstrație. Deoarece $A_{[P_a P_b P_c]} = \frac{|R^2 - OP^2|}{2} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, iar când P se plimbă pe cercul $\mathcal{C}$, segmentul OP are aceeași lungime fiind rază în cercul $\mathcal{C}$, rezultă concluzia.

19) Dacă $P_a P_b P_c$ este triunghiul podar al punctului P în raport cu triunghiul ABC atunci: $\frac{P_a P_b}{AB \cdot CP} = \frac{P_b P_c}{BC \cdot AP} = \frac{P_a P_c}{CA \cdot BP}$.

Demonstrație. În cercul circumscriș triunghiului $AP_b P_c$ punctul P este punctul diametral opus punctului A . Teorema sinusurilor ne dă: $\frac{P_b P_c}{\sin A} = AP$, de unde

$$P_b P_c = AP \sin A = AP \cdot \frac{BC}{2R} \text{ și de aici } \frac{P_b P_c}{BC \cdot AP} = \frac{1}{2R} \text{ (unde } R \text{ este raza cercului circumscriș}$$

triunghiului ABC). Analog se arată că $\frac{P_a P_b}{AB \cdot CP} = \frac{P_a P_c}{CA \cdot BP} = \frac{1}{2R}$.

20) Fie P un punct interior triunghiului ABC și x, y, z distanțele de la P la laturile triunghiului BC , CA , respectiv AB . Notăm cu p perimetrul triunghiului podar al

punctului P . Atunci, $\sum (x + y) \cos \frac{C}{2} \leq p$.

Demonstrație. Fie a', b', c' lungimile laturilor triunghiului podar $P_a P_b P_c$ (Fig. 338). Avem:

$$c'^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(180^\circ - C) \text{ sau}$$

$$c'^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos C = (x - y)^2 + 4xy \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$c'^2 \geq [(x - y)^2 + 4xy] \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \text{ sau}$$

$$c' \geq (x + y) \cos^2 \frac{C}{2} \text{ de unde } c' \geq (x + y) \cos \frac{C}{2}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x = y$. Atunci

$$p = \sum c' \geq \sum (x + y) \cos \frac{C}{2} \text{ cu egalitate dacă și}$$

numai dacă $x = y = z$.

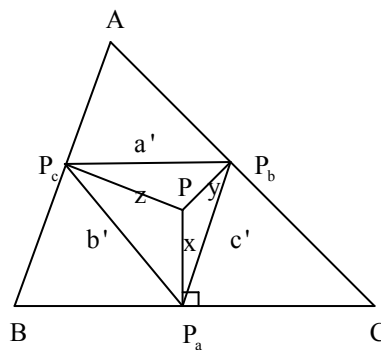


Fig. 388

21) Triunghiul podar al punctului lui Lemoine al triunghiului automedian ABC este asemenea cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul automedian”.

22) Proiecția pe bisectoarea unghiului A a unui triunghi ABC a unui punct arbitrar P de pe cercul circumscris triunghiului BIC - unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC - este centrul cercului circumscris triunghiului podar al punctului P în raport cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie P' simetricul lui P față de bisectoarea din A (Fig. 389). Deoarece centrul cercului circumscris triunghiului BIC aparține bisectoarei din A și este mijlocul arcului $\widehat{BC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC (vezi „Cercuri exînscrise”) rezultă că P' aparține cercului circumscris triunghiului, iar cum $\angle PBI \equiv \angle P'BI$ și $\angle PCI \equiv \angle P'CI$, rezultă că punctele P și P' sunt puncte izogonale. Proiecțiile punctelor izogonale P și P' pe laturile triunghiului ABC sunt conciclice pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului PP' , deci proiecția lui P pe bisectoarea din A este centrul cercului circumscris triunghiului podar al punctului P în raport cu triunghiul ABC .

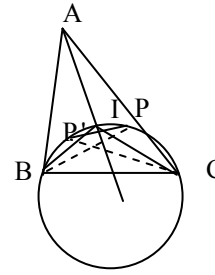


Fig. 389

23) Triunghiul podar al ortocentrului H al triunghiului ABC în raport cu triunghiul ortic al triunghiului ABC este omotetic cu triunghiul ABC , centrul de omotetie fiind punctul lui Gob.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gob”.

24) Triunghiul podar al unui punct P de pe un cerc al lui Apollonius, în raport cu triunghiul ABC este isoscel.

Demonstrație. Vezi „Cercurile lui Apollonius”.

25) Fie $A'B'C'$ triunghiul podar al unui punct P în raport cu un triunghi ABC și A'' cel de-al patrulea vârf al paralelogramului $B'PC'A''$. Analog se determină punctele B'' și C'' . Triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul izogonal conjugat al punctului P .

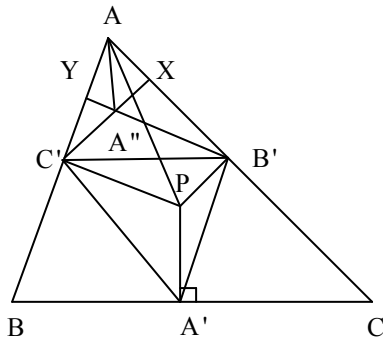


Fig. 390

Demonstrație. Arătăm că dreptele PA și AA'' sunt izogonale. Fie $\{X\} = CA'' \cap AC$ și $\{Y\} = BA'' \cap AB$ (Fig. 390). Deoarece patrulaterul $PB'AC'$ este inscriptibil, rezultă $\angle B'C'A \equiv \angle B'PA$ și $\angle B''AP \equiv \angle B''C'P$. Cum $m(\angle B'AP) + m(\angle B'PA) = 90^\circ$ și $m(\angle B'C'A) + m(\angle A''AC') = 90^\circ$ rezultă că $\angle PAB' \equiv \angle A''AC'$ (A'' fiind ortocentrul triunghiului $B'C'A$). Analog, se arată că dreptele PB și BB'' , respectiv PC și CC'' sunt izogonale, deci triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt omologice, centrul de omologie fiind izogonalul lui P .

26) Fie $A'B'C'$ triunghiul podar al unui punct P în raport cu un triunghi ABC . Notăm cu d_a dreapta ce trece prin mijloacele segmentelor PA și $B'C'$. Analog definim dreptele d_b, d_c . Dreptele d_a, d_b, d_c sunt concurente.

Demonstrație. Mijlocul segmentului PA este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, deci dreapta d_a este mediatoarea segmentului $B'C'$. Analog, d_b, d_c sunt mediatoarele segmentelor $C'A'$, respectiv $A'B'$, deci dreptele d_a, d_b, d_c sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului podar $A'B'C'$.

III.8. Triunghiul tangențial

„Totul ar fi trebuit să fie sfere,
dar n-a fost, n-a fost așa.
Totul ar fi trebuit să fie linii,
dar n-a fost, n-a fost așa.”

Nichita Stănescu¹⁸¹

Triunghiul $T_A T_B T_C$ determinat de tangentele duse la cercul circumscris triunghiului ABC în vârfurile acestuia se numește **triunghiul tangențial** al triunghiului ABC .

1) Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al triunghiului ABC este triunghiul antipodar al centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC în raport cu triunghiul ABC .

2) Centrul cercului circumscris O al triunghiului ABC reprezintă centrul cercului înscris în triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$.

3) Dreptele AT_A, BT_B și CT_C sunt concurente.

Demonstrație. Deoarece $T_A B \equiv T_A C, T_B A \equiv T_B C$,

$T_C A \equiv T_C B$ avem: $\frac{AT_A}{AT_C} \cdot \frac{BT_C}{BT_A} \cdot \frac{CT_A}{CT_B} = 1$ și din

reciprocă teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AT_A, BT_B și CT_C sunt concurente. Fie K punctul de concurență al dreptelor AT_A, BT_B, CT_C (Fig. 391).

4) Dreptele AT_A, BT_B, CT_C sunt simedianele triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $A' = pr_{BC}(A)$, $T'_A = pr_{AC}(T_A)$ și $T''_A = pr_{AB}(T_A)$ (Fig. 391). Cum

$m(\angle ABA') = m(\angle T'_A CT'_A) = \frac{1}{2} m(\angle AC)$ și $m(\angle AA'B) = m(\angle CT'_A T_A) = 90^\circ$ rezultă că triunghiurile

ABA' și $T_A CT'_A$ sunt asemenea, deci $\frac{T_A T'_A}{AA'} = \frac{T_A C}{AB}$ (1). Analog din asemănarea

triunghiurilor $AA'C$ și $T_A BT''_A$ rezultă $\frac{T_A T''_A}{AA'} = \frac{T_A B}{AC}$ (2). Împărțind relațiile (1) și (2)

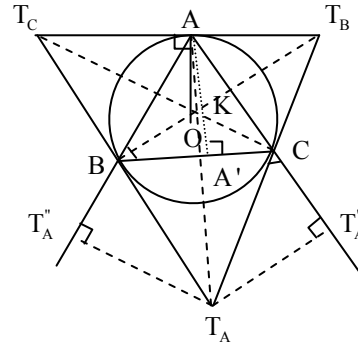


Fig. 391

¹⁸¹ Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române

membru cu membru rezultă $\frac{T_A T'_A}{T_A T''_A} = \frac{T_A C}{AB} \cdot \frac{CA}{BT_A} = \frac{CA}{AB}$, unde am utilizat $BT_A = CT_A$, relație ce arată că punctul T_A aparține simedianei din A a triunghiului ABC . Analog se arată că BT_B și CT_C sunt simediane.

Observații:

- 1) Punctul lui Lemoine K al triunghiului ABC este punctul de concurență al dreptelor AT_A, BT_B, CT_C , adică punctul lui Gergonne al triunghiului tangențial.
- 2) Punctul lui Lemoine este centrul de omologie dintre triunghiul ABC și triunghiului său tangențial.

5) Dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC este axa de omologie dintre triunghiul ABC și triunghiul său tangențial $T_A T_B T_C$.

Demonstrație. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de intersecție dintre tangentele la cercul circumscris ABC , vârfurile acestuia și laturile opuse. Din teorema lui Lemoine rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare (punctele aparțin dreptei lui

Lemoine). Avem $\frac{BA_1}{CA_1} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ (1). Fie

$\{C'\} = AB \cap T_A T_B, \{B'\} = AC \cap T_A T_C, \{A'\} = BC \cap T_B T_C$.

Să arătăm că punctele A', B', C' aparțin dreptei

$A_1 C_1$. Fie $\{K_A\} = AT_A \cap BC, \{K_B\} = BT_B \cap CA,$

$\{K_C\} = CT_C \cap AB$, iar K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC (Fig. 392). Deoarece

AK_A este simediană în triunghiul ABC rezultă $\frac{BK_A}{CK_A} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ (2). Din relațiile (1) și (2)

rezultă $\frac{BK_A}{CK_A} = \frac{BA_1}{CA_1}$, adică punctele A_1 și K_A sunt conjugate armonice față de punctele B și

C . Analog, se arată că și perechile de puncte $(B_1, K_B), (C, K_C)$ sunt conjugate armonice față de (C, A) , respectiv (A, B) , ceea ce demonstrează teorema.

6) Consecință: Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ este triunghiul anticevian al punctului lui Lemoine corespunzător triunghiului ABC .

7) Laturile triunghiului ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ABC sunt respectiv paralele cu laturile triunghiului tangențial $T_A T_B T_C$.

Demonstrație. $m(\angle T_C AB) = m(\angle AH_c H_b) = m(\angle ACB)$ rezultă că $T_C T_B \parallel H_c H_b$. Analog $T_A T_B \parallel H_a H_b$ și $T_A T_C \parallel H_a H_c$.

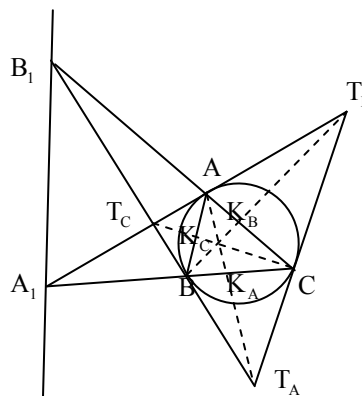


Fig. 392

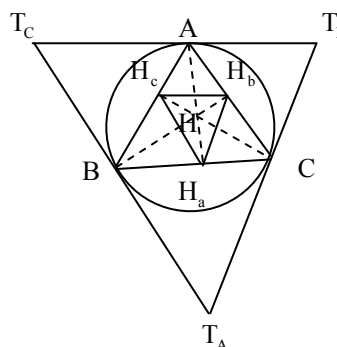


Fig. 393

8) Triunghiul ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ABC și triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al triunghiului ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Avem $\widehat{F_C AB} \equiv \widehat{F_C BA} \equiv \widehat{ACB}$, deci $m(\widehat{AT_C B}) = 180^\circ - 2m(\widehat{C})$. Dar $m(\widehat{H_b H_c H_a}) = 180^\circ - 2m(\widehat{C})$, deci $\widehat{F_B T_C T_A} \equiv \widehat{H_b H_c H_a}$ și analog $\widehat{T_A T_B T_C} \equiv \widehat{H_a H_b H_c}$. Atunci triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $H_a H_b H_c$ sunt asemenea și deoarece triunghiurile au laturile paralele (vezi proprietatea precedentă) rezultă că triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $H_a H_b H_c$ sunt omotetice.

Observație: Centrul omotetiei dintre triunghiul ortic $H_a H_b H_c$ și triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ aparține dreptei lui Euler a triunghiului ABC (vezi „Dreapta lui Euler”) și se numește **punctul lui Gob.**

9) Fie A^*, B^*, C^* mijloacele laturilor $H_b H_c, H_c H_a$, respectiv $H_a H_b$ ale triunghiului ortic al triunghiului ABC și $T_A T_B T_C$ triunghiul său tangențial. Punctele $A, A^*, T_A; B, B^*, T_B$; respectiv C, C^*, T_C sunt coliniare.

Demonstrație. Deoarece A^* este mijlocul antiparalelei $H_b H_c$ la BC rezultă că aparține simedianei din A , adică dreptei AT_A , de unde rezultă concluzia.

10) Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ și triunghiul median al triunghiului ortic corespunzător unui triunghi ABC sunt omotetice, punctul lui Lemoine al triunghiului ABC fiind centrul de omotetie.

Demonstrația rezultă din proprietatea de mai sus.

11) Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ și triunghiul median al triunghiului ortic corespunzător unui triunghi ABC sunt ortologice, centrele de ortologie fiind ortocentrul triunghiului tangențial și centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $A^* B^* C^*$ triunghiul median al triunghiului ortic $H_a H_b H_c$. Deoarece $O_9 A^* \perp H_b H_c$ și $T_C T_B \parallel H_c H_b$ rezultă $O_9 A^* \perp T_C T_B$. Analog, se arată că $O_9 B^* \perp T_C T_A$ și $O_9 C^* \perp T_A T_B$, deci triunghiurile $A^* B^* C^*$ și $T_A T_B T_C$ sunt ortologice, unul dintre centre fiind centrul cercului lui Euler O_9 . Deoarece $T_A H_x \perp T_B T_C$ și $T_B T_C \perp B^* C^*$ rezultă $T_A H_x \perp B^* C^*$ (unde H_x este ortocentrul triunghiului tangențial), analog $T_B H_x \perp A^* C^*$, deci H_x este al doilea centru de ortologie.

12) Aria triunghiului tangențial este egal cu: $A_{[T_A T_B T_C]} = \frac{a^2 \operatorname{tg} A + b^2 \operatorname{tg} B + c^2 \operatorname{tg} C}{4} + A_{[ABC]}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC .

Demonstrație. În triunghiul isoscel $BT_A C$ ($m(\widehat{F_A BC}) = m(\widehat{F_A CB}) = m(\widehat{A})$) avem:

$$\cos \hat{A} = \frac{a}{2CT_A}, \quad \text{de} \quad \text{unde} \quad CT_A = \frac{a}{2 \cos A}. \quad \text{Atunci,}$$

$$A_{[T_A BC]} = \frac{BC \cdot CT_A \cdot \sin \widehat{BCT_A}}{2} = \frac{a^2 \sin A}{4 \cos A} = \frac{a^2 \operatorname{tg} A}{4}. \quad \text{Analog,} \quad A_{[T_B AC]} = \frac{b^2 \operatorname{tg} B}{4} \quad \text{și}$$

$$A_{[T_CBA]} = \frac{c^2 \operatorname{tg} C}{4}, \quad \text{de unde} \quad A_{[T_AT_BT_C]} = A_{[T_AAC]} + A_{[T_BAC]} + A_{[T_CBA]} + A_{[ABC]} =$$

$$\frac{a^2 \operatorname{tg} A + b^2 \operatorname{tg} B + c^2 \operatorname{tg} C}{4} + A_{[ABC]}.$$

Observație: Dar triunghiul ABC este obtuzunghic, de exemplu $m(\hat{A}) > 90^\circ$, atunci

$$A_{[T_ABC]} = \frac{a^2}{4} \cdot |\operatorname{tg} A|.$$

13) Centrul cercului circumscris triunghiului tangențial $T_AT_BT_C$ al triunghiului ABC aparține dreptei lui Euler a triunghiului ABC .

Demonstrație. Dreapta determinată de centrul cercului circumscris, respectiv înscris într-un triunghi XYZ este dreapta lui Euler a triunghiului de contact al triunghiului XYZ (vezi „Dreapta lui Euler”). Cum triunghiul ABC este triunghiul de contact corespunzător triunghiului tangențial rezultă că dreapta lui Euler a triunghiului ABC trece prin centrul cercului circumscris triunghiului tangențial $T_AT_BT_C$.

14) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Centrele O_A, O_B, O_C ale cercurilor circumscrise triunghiurilor BCO, ACO , respectiv BAO determină un triunghi omotetic cu triunghiul tangențial $T_AT_BT_C$ al triunghiului ABC , centrul de omotetrie fiind punctul O .

Demonstrație.

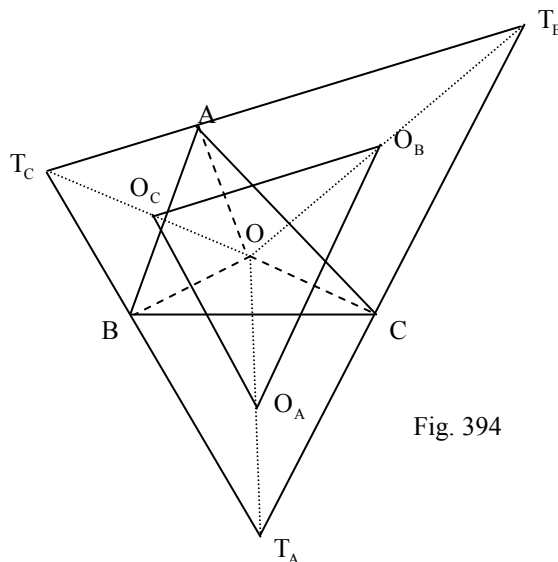


Fig. 394

Deoarece $OC \perp O_AO_B$ și $OC \perp T_AT_B$ rezultă $O_AO_B \parallel T_AT_B$. Analog, $O_BO_C \parallel T_BT_C$ și $O_CO_A \parallel T_CT_A$. Deoarece $OO_A \perp BC$ și $T_AO \perp BC$ (triunghiul T_ABC fiind isoscel) rezultă că punctele O, O_A și T_A sunt coliniare. Analog O, O_B și T_B respectiv O, O_C și T_C sunt coliniare. Atunci, triunghiurile $O_AO_BO_C$ și $T_AT_BT_C$ sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul O .

15) Triunghiul tangențial al triunghiului ABC și triunghiul circumpedal al centrului de greutate al triunghiului ABC sunt omologice.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Exeter”.

16) Triunghiurile tangențial și extangențial corespunzătoare unui triunghi ABC sunt omotetice, raportul de omotetie fiind $\frac{2R+r}{R}$.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul extangențial”.

17) Fie $T_A T_B T_C$ triunghiul tangențial, $N_a N_b N_c$ și $N'_a N'_b N'_c$ triunghiurile lui Napoleon ale unui triunghi ABC . Punctele N_a, N'_a, T_A sunt coliniare.

Demonstrația este evidentă deoarece punctele N_a, N'_a, T_A aparțin mediatoarei segmentului BC .

18) Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al triunghiului ABC și triunghiul median $M_a M_b M_c$ al triunghiului ABC sunt omologice.

Demonstrație. Deoarece $BT_A \equiv CT_A$, $AT_B \equiv CT_B$, $AT_C \equiv BT_C$ (Fig. 395) rezultă că $M_a T_A, M_b M_B, M_c M_C$ sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC , deci ele sunt concurente în centrul cercului circumscris O al triunghiului ABC , deci triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$ sunt omologice.

Observație: Centrul cercului circumscris triunghiului ABC este polul de omologie al triunghiului $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$.

19) Axa de omologie dintre triunghiurile tangențial și median ale unui triunghi ABC este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $A'B'C'$ axa de omologie dintre triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$ (Fig. 395). Deoarece $M_b M_c \parallel BC$, atunci

$\angle A'AC \equiv \angle ABC \equiv \angle AM_c M_b$, de unde rezultă că triunghiurile $AM_b A'$ și $M_c AA'$ sunt asemenea, deci

$$\frac{AA'}{A'M_c} = \frac{A'M_b}{AA'}, \quad \text{egalitate}$$

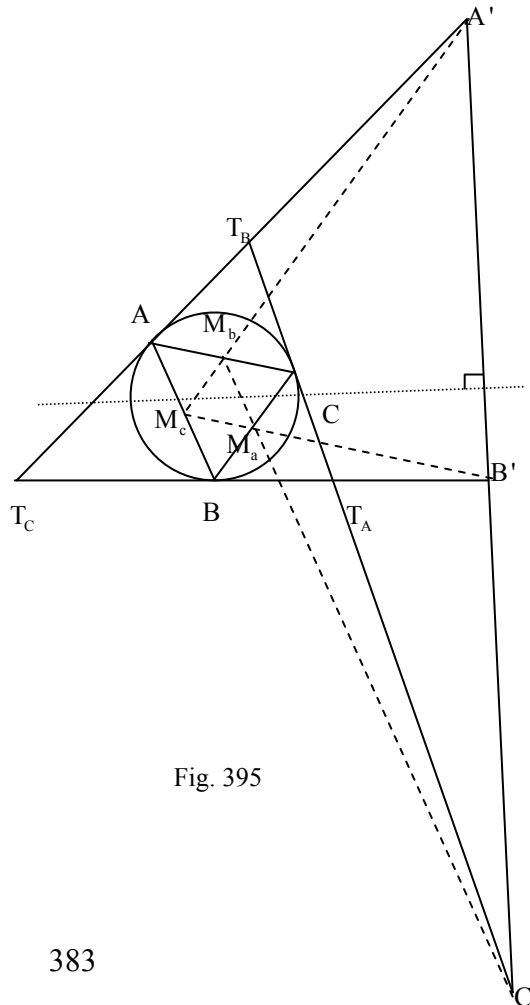


Fig. 395

echivalentă cu $AA'^2 = A'M_b \cdot A'M_c$. Cum $A'M_c$ este secantă la cercul lui Euler, rezultă că A' are aceeași putere față de cercul circumscris triunghiului ABC și de cercul lui Euler al triunghiului ABC , deci A' aparține axei radicale a acestor cercuri. Analog se arată că B' și C' aparțin acestei axe, deci axa de omologie este axa radicală a cercului circumscris triunghiului ABC și a cercului lui Euler al triunghiului ABC . Deoarece axa radicală este perpendiculară pe linia centrelor OO_9 , adică pe dreapta lui Euler, rezultă că axa de omologie dintre triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$ este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .

20) Prin inversiunea de centru O și raport R^2 , cercul circumscris triunghiului tangențial $T_A T_B T_C$ se transformă în cercul lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor BOM_a și $T_A OB$ rezultă: $\frac{OM_a}{R} = \frac{R}{OT_A}$,

adică $OM_a \cdot OT_A = R^2$. Analog, se arată că $OM_b \cdot OT_B = OM_c \cdot OT_c = R^2$, relații ce arată că prin inversiunea $\mathcal{J}(O, R^2)$ cercul circumscris triunghiului tangențial se transformă în cercul circumscris triunghiului median, adică cercul lui Euler al triunghiului ABC .

21) Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ABC , A', B', C' punctele de intersecție dintre înălțimile din A, B respectiv C și laturile triunghiului ABC cu $\mathcal{C}$, iar $T_A T_B T_C$ triunghiul tangențial al triunghiului ABC . Dreptele $T_A A', T_B B', T_C C'$ sunt concurente într-un punct ce aparține dreptei lui Euler a triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse în $\mathcal{C}$ ale punctelor A, B respectiv C , iar X punctul de intersecție dintre cercul T_A -exînscriș, corespunzător triunghiului $T_A T_B T_C$ cu latura $T_B T_C$. Analog se definesc prin punctele Y și Z . Deoarece în triunghiul ABC , AA' și AA_1 sunt izogonale (vezi „Drepte izogonale”) rezultă că dreptele $T_A A'$ și $T_A A_1$ sunt izogonale conjugate în triunghiul tangențial. Deoarece T_A este centrul de asemănare dintre cercurile $\mathcal{C}$ și cercul T_A -exînscriș, rezultă că punctele T_A , A_1 și X sunt coliniare. Deoarece dreptele $T_A X, T_B Y$ și $T_C Z$ sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului $T_A T_B T_C$, rezultă că și izogonalele lor - adică dreptele $T_A A', T_B B', T_C C'$ sunt concurente într-un punct S care este centrul de asemănare dintre cercurile $\mathcal{C}$ și cercul circumscris triunghiului $T_A T_B T_C$, deci S aparține dreptei lui Euler a triunghiului ABC .

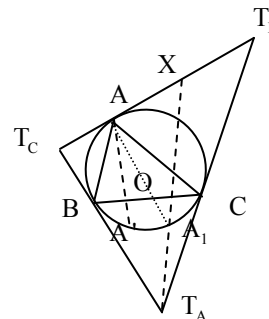


Fig. 396

III.9. Triunghiul anticomplementar

„Geometrii se servesc de figuri vizibile și fac judecăți asupra acestora, deși ei nu se gândesc la aceste figuri, ci la altele care se aseamănă, dar care nu pot fi sesizate decât cu mintea.” - Platon¹⁸²

Triunghiul anticomplementar (sau **antimedial**) al triunghiului ABC este triunghiul $A'B'C'$ determinat de paralelele duse prin vârfurile triunghiului ABC la laturile opuse.

Numim **exmediană** a unui triunghi o dreaptă ce trece prin vârful unui triunghi și este paralelă cu latura opusă. Triunghiul anticomplementar este determinat de intersecțiile exmedianelor triunghiului ABC . Vârfurile triunghiului anticomplementar se numesc **puncte exmedianale**.

1) Triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC dacă triunghiul ABC este triunghiul său median.

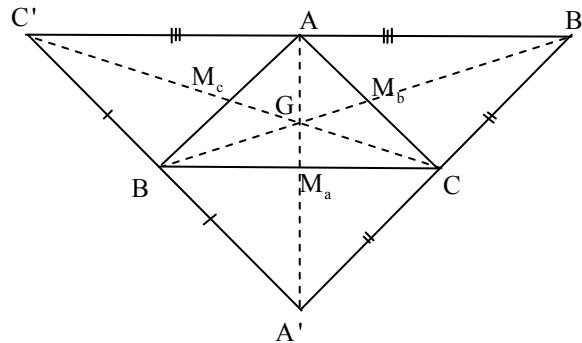


Fig. 397

2) Segmentele AB , BC , AC sunt liniile mijlocii ale triunghiului anticomplementar.

3) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA respectiv AB ale triunghiului ABC , atunci laturile triunghiului anticomplementar $A'B'C'$ sunt egale cu $2a, 2b, 2c$.

4) Centrul de greutate al triunghiului anticomplementar al triunghiului ABC este centrul de greutate și pentru triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie G centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ și M_a, M_b, M_c triunghiul său median. Deoarece patrulaterul $ABA'C$ este paralelogram rezultă că diagonalele BC și AA' se înjumătățesc, deci AM_a este mediană în triunghiul ABC . Analog se arată că BM_b este mediană, deci G este centrul de greutate al triunghiul ABC .

Observație: Triunghiul anticomplementar $A'B'C'$ este triunghiul anticevian al triunghiului ABC corespunzător centrului de greutate G al acestuia.

5) Aria triunghiului anticomplementar $A'B'C'$ este egal cu: $A_{[A'B'C']} = 4A_{[ABC]}$.

¹⁸² Platon (428-348) – filosof, logician, matematician grec

Demonstrație. Deoarece patrulatele $ABA'C$, $ABCB'$ și $AC'BC$ sunt paralelograme, rezultă că $A_{[ABC]} = A_{[BCA]} = A_{[ACB]} = A_{[ABC']}$, de unde $A_{[A'B'C']} = 4 \cdot A_{[ABC]}$.

Cercul circumscris triunghiului anticomplementar se numește *cerc anticomplementar*.

6) Centrul cercului anticomplementar este ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $AH_a \perp BC$. Din $BC \parallel B'C'$ rezultă că $AH_a \perp B'C'$, cum A este mijlocul segmentului $B'C'$ obținem că AH_a este mediatoarea segmentului $B'C'$. Analog se arată că înălțimea BH_b este mediatoarea segmentului $A'C'$, deci punctul de concurență al înălțimilor triunghiului ABC este centrul cercului circumscris triunghiului anticomplementar.

7) Raza cercului anticomplementar este egală cu dublul razei cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație.

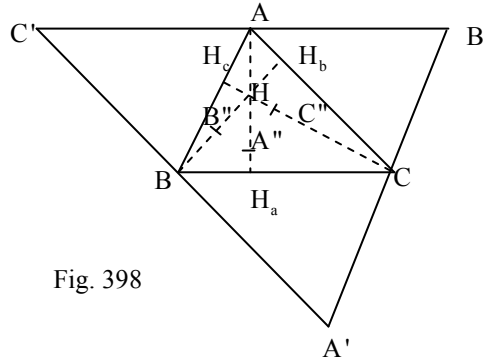


Fig. 398

Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC și R_A raza cercului circumscris triunghiului anticomplementar $A'B'C'$. Atunci: $R_A = \frac{a' \cdot b' \cdot c'}{4A_{[A'B'C']}} = \frac{2a \cdot 2b \cdot 2c}{4 \cdot 4 \cdot A_{[ABC]}} =$

$$2 \cdot \frac{abc}{4A_{[ABC]}} = 2R.$$

8) Fie $A'B'C'$ triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC și A'', B'', C'' simetricele punctelor A, B respectiv C față de ortocentrul H al triunghiului ABC . Dreptele $A'A'', B'B'', C'C''$ sunt concurente.

Demonstrație. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC . Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Atunci

$$O(o), A(a), B(b), C(c), H(a+b+c), \text{ de unde rezultă } h = \frac{a+a''}{2} = \frac{b+b''}{2} = \frac{c+c''}{2} \text{ și de aici}$$

$$a'' = a + 2b + 2c, b'' = 2a + b + 2c, c'' = 2a + 2b + c. \text{ Deoarece } a = \frac{c'+b'}{2}, b = \frac{a'+c'}{2}, c = \frac{a'+b'}{2}$$

rezultă $a+b+c = a'+b'+c'$, deci $2a = a+b+c-a'$, de unde $a' = b+c-a$ și analog,

$$b' = a + c - b, c' = b + a - c. \quad \text{Ecuația dreptei } A'A'' \text{ este: } \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a' & \bar{a}' & 1 \\ a'' & \bar{a}'' & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau}$$

$z(2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}) + \bar{z}(b + c - 2a) + 3[(b\bar{a} - a\bar{b}) + (c\bar{a} - a\bar{c})] = 0$ (1). Analog ecuațiile dreptelor $B'B''$ și $C'C''$ sunt: $(B'B'') : z(2\bar{b} - \bar{a} - \bar{c}) + \bar{z}(a + c - 2b) + 3[(a\bar{b} - b\bar{a}) + (c\bar{b} - b\bar{c})] = 0$ (2), respectiv $(C'C'') : z(2\bar{c} - \bar{a} - \bar{b}) + \bar{z}(a + b - 2c) + 3[(a\bar{c} - c\bar{a}) + (b\bar{c} - c\bar{b})] = 0$ (3). Sumând ecuațiile (1), (2) și (3) obținem o egalitate ceea ce arată că dreptele $A'A''$, $B'B''$ și $C'C''$ sunt concurente

9) Cercul circumscris triunghiului anticomplementar al triunghiului ABC este tangent cercurilor circumscrise triunghiurilor BHC , CHA și AHB , unde H este ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece patrulaterul $HBA'C$ este inscriptibil, iar $\angle HBA' = 90^\circ$ rezultă că HA' este diametrul în cercul circumscris patrulaterului $HBA'C$. Cum HA' este raza în cercul circumscris triunghiului anticomplementar rezultă cercul circumscris triunghiului BHC este tangent interior în A' cercului anticomplementar. Analog se arată că cercurile circumscrise triunghiurilor CHA și AHB sunt tangente interior cercului anticomplementar.

10) Punctul lui Lemoine al triunghiului anticomplementar al unui triunghi ABC este retrocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Retrocentrul unui triunghi”.

11) Într-un triunghi ABC , dreapta ON , care unește centrul cercului circumscris cu punctul lui Nagel, al triunghiului ABC , trece prin punctul lui Feuerbach al triunghiului anticomplementar.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Nagel”.

12) Ortocentrul triunghiului anticomplementar al unui triunghi ABC este punctul lui Longchamps al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Longchamps”.

13) Triunghiul antipodar al ortocentrului H al triunghiului ABC este triunghiul anticomplementar.

Demonstrația rezultă din cele de mai sus.

III.10. Triunghiul antisuplementar

„Definițiile și proprietățile drepte, ca și dreptele paralele au ajuns să fie stâncile sau , ca să spunem altfel, scandalul elementelor de geometrie.” - D'Alembert¹⁸³

Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ al unui triunghi ABC este triunghiul determinat de bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC (Fig. 399).

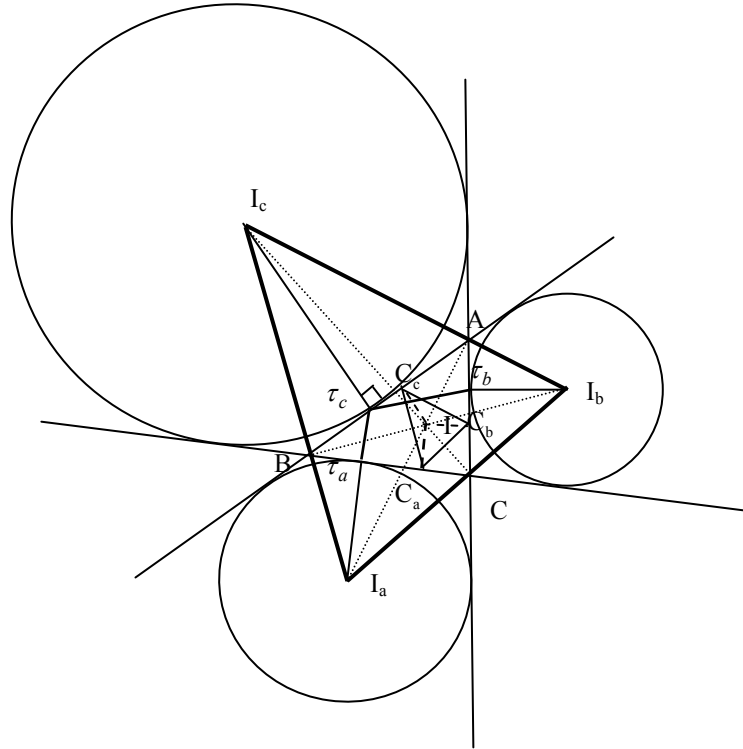


Fig. 399

1) Triunghiul $I_a I_b I_c$ având vârfurile în centrele cercurilor exînscrise este triunghiul antisuplementar al triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă ținând cont că punctele I_a, I_b, I_c aparțin bisectoarelor exterioare ale triunghiului ABC .

2) Unghiurile triunghiului antisuplementar au măsurile egale cu $90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$, $90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B)$, $90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C)$.

¹⁸³ Jean d'Alembert (1717-1783) – matematician și fizician francez, contribuții importante în algebră și analiza matematică

Demonstrație. În triunghiul BCI_a , $m(\sphericalangle BI_aC) = 180^\circ - [m(\sphericalangle I_aBC) + m(\sphericalangle I_aCB)] = 180^\circ - \left[90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B) + 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C) \right] = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$. Analog, $m(\sphericalangle AI_bC) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B)$, $m(\sphericalangle AI_cB) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C)$.

3) Triunghiul antisuplementar corespunzător triunghiului ABC este triunghiul anticevian corespunzător centrului cercului înscris (I) în triunghiul ABC .

Demonstrația este evidentă.

4) Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului antisuplementar.

Demonstrație. Deoarece AI_a, BI_b, CI_c sunt înălțimile triunghiului $I_aI_bI_c$ (vezi, „Cercurile exînscrise”) rezultă că triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_aI_bI_c$.

Consecințe:

i) *Triunghiurile ABC și antisuplementar sunt omologice.*

ii) *Axa ortică a triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$ al triunghiului ABC este axa ortică a triunghiului ABC .*

5) Cercul circumscris al unui triunghi ABC este cercul lui Euler al triunghiului antisuplementar al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_aI_bI_c$ rezultă că cercul circumscris triunghiului ABC este cercul lui Euler al triunghiului $I_aI_bI_c$.

6) Dreapta care unește centrele cercurilor înscris și circumscris ale unui triunghi ABC este dreapta lui Euler a triunghiului antisuplementar.

Demonstrație. Centrul cercului înscris I al triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului antisuplementar, iar centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC este centrul cercului lui Euler al triunghiului antisuplementar, deci dreapta OI este dreapta lui Euler a triunghiului antisuplementar.

Observație: Triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ și triunghiul de contact $C_aC_bC_c$ au aceeași dreaptă a lui Euler OI .

7) Dreptele OI_a, OI_b, OI_c sunt dreptele lui Euler ale triunghiului $I_bI_cI_a$, respectiv $I_aI_bI_c$.

Demonstrația este analoagă celei precedente.

8) Triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ și triunghiul cevian $I_1I_2I_3$ al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC sunt ortologice, dreapta lui Euler a triunghiului $I_aI_bI_c$ fiind axa de ortologie.

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler”.

9) Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ și triunghiul de contact $C_a C_b C_c$ al unui triunghi ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Deoarece $C_b C_c \perp AI$ și $I_b I_c \perp AI$ rezultă că $C_b C_c \parallel I_b I_c$ (Fig. 399). Analog, $C_a C_c \parallel I_a I_c$, $C_a C_b \parallel I_a I_b$, de unde rezultă că triunghiurile $I_a I_b I_c$ și $C_a C_b C_c$ sunt omotetice.

10) Centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar coincide cu centrul cercului înscris în triunghiul extangential.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul cotangent”.

11) Laturile triunghiului median $M_a M_b M_c$ al unui triunghi ABC trec prin proiecțiile vârfurilor triunghiului ABC pe laturile triunghiului antisuplementar $I_a I_b I_c$.

Demonstrație. Fie B_1, B_2 proiecțiile lui B pe laturile $I_c I_b$ și $I_a I_b$ ale triunghiului antisuplementar și $\{P\} = BB_1 \cap AC$. Triunghiul APB este isoscel deoarece AB este bisectoare și înălțime, deci B_1 este mijlocul segmentului PB . În triunghiul APB , $M_c B_1$ este linie mijlocie, deci $M_c B_1 \parallel AP$ adică $M_c B_1 \parallel AC \parallel M_a M_c$, de unde rezultă că $B_1 \in M_a M_c$ analog se arată că $B_2 \in M_a M_c$.

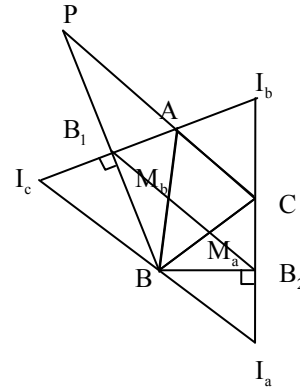


Fig. 400

12) Consecință: Laturile triunghiului median al triunghiului ortic trec prin proiecțiile picioarelor înălțimilor pe laturile triunghiului dat.

Demonstrația este evidentă ținând cont că ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$.

13) Centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar al unui triunghi ABC este simetricul cercului înscris în triunghiul ABC față de centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul cotangent”.

14) Fie $M_a M_b M_c$ triunghiul median și $I_a I_b I_c$ triunghiul antisuplementar al triunghiului ABC . Dreptele $I_a M_a, I_b M_b, I_c M_c$ sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului antisuplementar.

Demonstrație. Vezi „Cercurile exînscrise”.

15) Triunghiurile antisuplementar și median ale triunghiului ABC sunt omoloage, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului antisuplementar.

Demonstrație. Proprietatea este o consecință a celei precedente.

16) Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ și triunghiul cevian al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC sunt ortologice.

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler”.

17) Aria triunghiului antisuplementar $I_a I_b I_c$ al triunghiului ABC este egală cu $2pR$, unde p este semiperimetrul triunghiului ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Soluția1.
$$A_{[I_a I_b I_c]} = A_{[I_a B C]} + A_{[I_b A C]} + A_{[I_c A B]} + A_{[A B C]} = \frac{ar_a}{2} + \frac{br_b}{2} + \frac{cr_c}{2} + A_{[ABC]} = \frac{aA_{[ABC]}}{2(p-a)} + \frac{bA_{[ABC]}}{2(p-b)} + \frac{cA_{[ABC]}}{2(p-c)} + A_{[ABC]} = 2pR.$$

Soluția2. Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$. Dar $m(\angle BI_a C) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle BAC)$, $m(\angle AI_b C) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle ABC)$, $m(\angle BI_c A) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle BCA)$

$$A_{[ABC]} = 2A_{[I_a I_b I_c]} \cdot \cos I_a \cdot I_b \cdot I_c = 2A_{[I_a I_b I_c]} \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = A_{[I_a I_b I_c]} \cdot \frac{A_{[ABC]}}{2pR},$$
 de unde rezultă concluzia.

18) Între ariile triunghiurilor antisuplementar, cotangent și aria triunghiului de referință ABC există relația : $A_{[ABC]}^2 = A_{[\tau_a \tau_b \tau_c]} \cdot A_{[I_a I_b I_c]}.$

Demonstrație.
$$A_{[I_a I_b I_c]} = \frac{A_{[ABC]}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{A_{[ABC]}^2}{2A_{[ABC]} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{A_{[ABC]}^2}{A_{[\tau_a \tau_b \tau_c]}}.$$

19) Triunghiul antipodar al centrului cercului înscris în triunghiul ABC este triunghiul antisuplementar corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă deoarece $AI \perp I_b I_c$, $BI \perp I_c I_a$, $CI \perp I_a I_b$.

20) Axa ortică a triunghiului $I_a I_b I_c$ este dreapta determinată de picioarele bisectoarelor exterioare ale triunghiului ABC .

Demonstrație. Evident, deoarece triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$ este triunghiul ABC și I este ortocentrul triunghiului $I_a I_b I_c$.

Observație: Deoarece axa ortică a unui triunghi este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului rezultă că dreapta care unește picioarele bisectoarelor exterioare ale unui triunghi ABC este perpendiculară pe OI .

III.11. Triunghiul ciclocevia

„Matematica este alfabetul după care Dumnezeu a scris Universul.” - Galileo Galilei¹⁸⁴

Fie cevienele AA', BB', CC' și P punctul lor de concurență. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ intersectează fiecare latură în două puncte (nu neapărat distincte): A', A'' ; B', B'' și C', C'' .

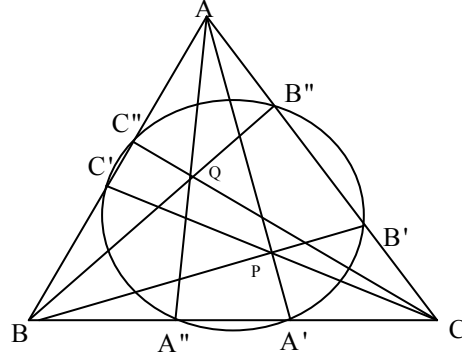


Fig. 401

1) Dreptele AA'', BB'' și CC'' sunt concurente.

Demonstrație. Din teorema lui Carnot rezultă $\frac{A''B}{A'C} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B''C}{B'A} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C''A}{C'B} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, adică

$\left(\frac{A''B}{A'C} \cdot \frac{B''C}{B'A} \cdot \frac{C''A}{C'B} \right) \cdot \left(\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \right) = 1$ (1). Deoarece AA', BB', CC' sunt concurente, din

teorema lui Ceva rezultă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă

$\frac{A''B}{A'C} \cdot \frac{B''C}{B'A} \cdot \frac{C''A}{C'B} = 1$ și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA'', BB'' și CC'' sunt concurente.

Observații:

1) Punctul Q de concurență al dreptelor AA'', BB'' și CC'' se numește **ciclocevia** **punctului P** .

2) Triunghiul $A''B''C''$ se numește **triunghiul ciclocevia** al triunghiului ABC , corespunzător punctului P .

2) Ortocentrul H și centrul de greutate G al unui triunghi sunt puncte cicloceviene.

Demonstrație. Punctele $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c$ aparțin cercului lui Euler al triunghiului ABC (vezi „Cercul lui Euler”) (Fig. 402).

¹⁸⁴ Galileo Galilei (1564-1642) – matematician, fizician, astronom și filosof italian

Observații:

- 1) Triunghiul median este triunghiul ciclocevia al triunghiului ABC corespunzător ortocentrului triunghiului ABC .
- 2) Triunghiul ortic este triunghiul ciclocevia al triunghiului ABC corespunzător centrului de greutate al triunghiului ABC .

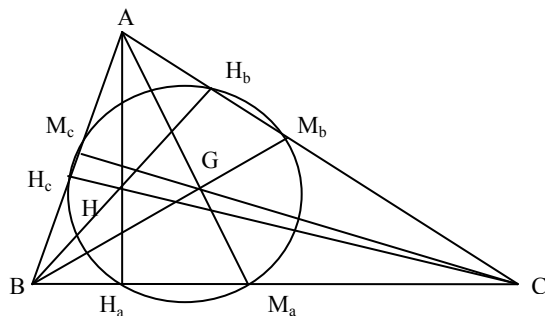


Fig. 402

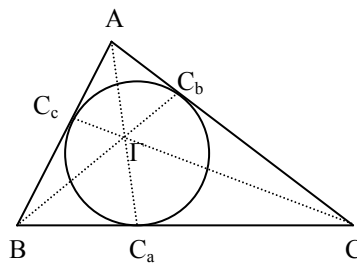


Fig. 403

3) Punctul lui Gergonne Γ al triunghiului ABC este propriul său punct ciclocevia.

Demonstrație. Evident, deoarece cercul circumscris triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ este tangent laturilor triunghiului ABC (Fig. 403).

Observație. Triunghiul ciclocevia corespunzător punctului lui Gergonne este triunghiul de contact al triunghiului ABC .

III.12. Triunghiul I - pedal

„Ați observat că cine este capabil la matematică are cunoștințe perfecte
domeniul tuturor științelor legate de studiereanaturii?”-Platon¹⁸⁵

Triunghiul $I_1 I_2 I_3$ determinat de picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC se numește **triunghiul I – pedal**.

1) Triunghiul $I_1 I_2 I_3$ este triunghiul cevian al triunghiului ABC corespunzător centrului cercului înscris în triunghiul ABC .

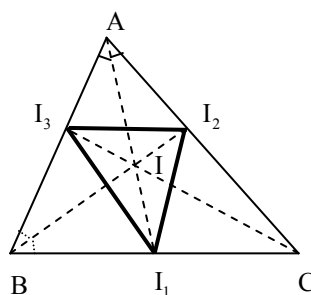


Fig. 404

¹⁸⁵ Platon (428-348) – filosof, logician, matematician grec

2) Laturile triunghiului I – pedal, $I_1I_2I_3$, au lungimile $a' = \frac{abc\sqrt{3+2(-\cos A + \cos B + \cos C)}}{(a+b)(a+c)}$,
 $b' = \frac{abc\sqrt{3+2(\cos A - \cos B + \cos C)}}{(b+c)(b+a)}$, $c' = \frac{abc\sqrt{3+2(\cos A + \cos B - \cos C)}}{(c+a)(c+b)}$, **(unde am notat cu a', b', c' lungimile laturilor I_2I_3, I_3I_1 , respectiv I_1I_2 și cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC).**

Demonstrație. Din teorema bisectoarei rezultă $\frac{AI_2}{I_2C} = \frac{c}{a}$, de unde $AI_2 = \frac{bc}{a+c}$ și analog se obține $AI_3 = \frac{bc}{a+b}$. Teorema cosinusului aplicată în triunghiul AI_2I_3 ne dă:
 $I_2I_3^2 = AI_2^2 + AI_3^2 - 2AI_2 \cdot AI_3 \cdot \cos A$, sau $a'^2 = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - 2 \cdot \frac{bc}{a+c} \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$
 $\frac{b^2c^2}{(a+b)^2(a+c)^2} [(a+b)^2bc + (a+c)^2bc - b^2 - c^2 + a^2] = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \cdot [3+2(-\cos A + \cos B + \cos C)]$
și de aici rezultă: $a' = \frac{abc\sqrt{3+2(-\cos A + \cos B + \cos C)}}{(a+b)(a+c)}$. Analog se determină și lungimile celorlalte două laturi.

3) Aria triunghiului I – pedal este egală cu $A_{[I_1I_2I_3]} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot A_{[ABC]}$.

Demonstrație. Din teorema bisectoarei avem: $\frac{BI_1}{I_1C} = \frac{c}{b}$, $\frac{CI_2}{I_2A} = \frac{a}{c}$, $\frac{AI_3}{I_3B} = \frac{b}{a}$. Atunci,

$$\frac{A_{[AI_2I_3]}}{A_{[ABC]}} = \frac{AI_2 \cdot AI_3}{AB \cdot AC} = \frac{AI_2}{AC} \cdot \frac{AI_3}{AB} = \frac{c}{a+b} \cdot \frac{b}{a+c} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)} \quad (1), \quad \text{analog}$$

$$\frac{A_{[BI_1I_3]}}{A_{[ABC]}} = \frac{ac}{(b+a)(b+c)} \quad (2) \quad \text{și} \quad \frac{A_{[CI_2I_1]}}{A_{[ABC]}} = \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \quad (3), \quad \text{iar}$$

$$A_{[I_1I_2I_3]} = A_{[ABC]} - A_{[AI_2I_3]} - A_{[BI_1I_3]} - A_{[CI_2I_1]} \quad (4). \quad \text{Din relațiile (1), (2), (3) și (4) rezultă}$$

$$A_{[I_1I_2I_3]} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot A_{[ABC]}.$$

4) Triunghiul cevian $I_1I_2I_3$ al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC și triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ și sunt ortologice.

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler”.

5) Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC , $I_1I_2I_3$ triunghiul cevian al punctului I , I' simetricul lui I față de latura BC , $\{A_1\} = AI' \cap BC$, $\{A'\} = AI_1 \cap I_2I_3$. Dreptele $A'A_1$ și BC sunt perpendiculare.
 Demonstrație.

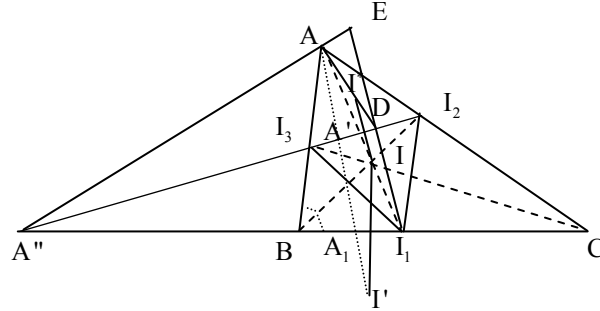


Fig. 405

Deoarece AA' și AI_1 sunt bisectoare în triunghiurile AI_2I_3 și ABC rezultă:

$$AA' = \frac{2bc}{2a+b+c} \cos \frac{A}{2}, AI_1 = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}. \text{ Din teorema bisectoarei rezultă } \frac{AI}{II_1} = \frac{c}{BI_1} = \frac{b+c}{a}$$

de unde $AI = \frac{2bc}{a} \cos \frac{A}{2}$ și $A'I = AI - AA' = 2bc \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{a+b+c}{a(2a+b+c)}$. Atunci,

$$\frac{AA'}{AI_1} = \frac{IA'}{II_1}, \text{ deci punctele } A, I, I', I_1 \text{ sunt conjugate armonice, atunci } A' \text{ și } I_1 \text{ sunt}$$

picioarele bisectoarelor interioare, respectiv exterioare ale unghiului A_1 al triunghiului $AA'I$, deci $A'A_1 \perp BC$.

6) Fie $I_1I_2I_3$ triunghiul cevian al centrului cercului înscris (I) în triunghiul ABC , I^* simetricul punctului I față de I_2I_3 , $\{D\} = AI^* \cap I_2I_3$. Dreptele I_1D și I_2I_3 sunt perpendiculare.

Demonstrație. Deoarece punctele A, A', I, I_1 sunt conjugate armonice (cf. th. 5), atunci considerând fasciculul $(D; A, I, A', I_1)$ rezultă că DA' este bisectoarea interioară a unghiului $\square IDA$ și DI_1 bisectoarea exterioară a unghiului $\square IDA$, deci $DA' \perp DI_1$.

7) Fie $I_1I_2I_3$ triunghiul I – cevian al triunghiului oarecare ABC , D piciorul înălțimii din I_1 pe I_2I_3 , I' simetricul lui I față de BC și $\{A_1\} = AI' \cap BC$. Punctele A_1, I și D sunt coliniare.

Demonstrație. Fie $\{A'\} = AI_1 \cap I_2I_3$, $\{A''\} = I_2I_3 \cap BC$ și $\{E\} = AA'' \cap AA'$. Deoarece AA'' este bisectoarea unghiului BAC (vezi „Dreapta antiortică”) rezultă că $AA'' \perp AI_1$. Din $EA_1 \perp BC$, $I_1D \perp I_2I_3$ rezultă că A' este ortocentrul triunghiului $I_1A''E$, deci $A''D \perp I_1E$. Deoarece $I_1D \perp A''D$ rezultă că punctele E, D și I_1 sunt coliniare. Fie $\{Y\} = DA_1 \cap A'I_1$. Deoarece $A'I_2$ este bisectoarea interioară a unghiului $\square ADA_1$, I_1D bisectoarea exterioară a

unghiului $\square ADA_1$ rezultă că punctele A, J, A', I_1 sunt conjugate armonice, deci $\frac{AA'}{AI_1} = \frac{JA'}{JI_1}$.

Dar $\frac{AA'}{AI_1} = \frac{IA'}{AI_1}$ de unde $\frac{JA'}{JI_1} = \frac{IA'}{AI_1}$ și cum $I, J \in (AI_1)$ rezultă $I \equiv J$. Deci, punctele A_1, I și D sunt coliniare.

Observație: Fie $\{A_2\} = AD \cap BC$. Analog se demonstrează că punctele A_2, I, A' sunt coliniare.

8) Fie $I_1 I_2 I_3$ triunghiul I cevian al triunghiului ABC , D piciorul înălțimii din I_1 pe latura $I_2 I_3$ și I' simetricul lui I față de BC . Dreptele AI' și AD sunt izogonale.

Demonstrație. Punctele A_1, I, D sunt coliniare (conform proprietății precedente) și A_2, I, A' sunt coliniare. Din teorema lui Pappus aplicată patrulaterului $A_1 A' D A_2$ rezultă că punctele A'', I_1, A_1 și A_2 sunt conjugate armonice și deoarece $AA'' \perp AI_1$ rezultă că AI_1 este bisectoarea unghiului $\square A' AD$, deci dreptele AA' și AD sunt izogonale.

III.13. Triunghiuri altimediale

„Poetul nu este al sieși !
Viața lui este un cântec
un plâns pe buzele fiecăruia
dăruindu-se el se multiplică la infinit
și intră în toate chipurile, în toate
sufletele!
Nu-l învățați pe Poet pe dinafară
El se află înlăuntrul vostru,
ascultați – !” - Radu Cârneli¹⁸⁶

Fie M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor triunghiului ABC și H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor sale. Triunghiurile $H_a M_b M_c, H_b M_c M_a$ și $H_c M_a M_b$ se numesc **triunghiuri altimediale**.

1) Triunghiurile altimediale $H_a M_b M_c, H_b M_c M_a$ și $H_c M_a M_b$ sunt congruente cu triunghiul median $M_a M_b M_c$.

Demonstrație. În triunghiul dreptunghic $AH_a B$, $H_a M_c$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $M_c H_a = \frac{AB}{2} = M_a M_b$. Analog, $H_a M_b = \frac{AC}{2} = M_c M_a$, de unde rezultă că $\square H_a M_b M_c \equiv \square M_a M_b M_c$. Analog se arată că și triunghiuri altimediale $H_c M_a M_b$ și $H_b M_c M_a$ sunt congruente cu triunghiul median $M_a M_b M_c$.

¹⁸⁶ Radu Cârneli¹⁸⁶ - (1928 -) – poet român

2) Dacă G_a, G_b, G_c sunt centrele de greutate ale triunghiurilor altimediale $H_a M_b M_c$, $H_b M_c M_a$, respectiv $H_c M_a M_b$, atunci dreptele $M_a G_a$, $M_b G_b$, $M_c G_c$ sunt concurente în punctul lui Lemoine (K) al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie M mijlocul segmentului $M_b M_c$ și $\{A'\} = M_a G_a \cap AH_a$. Din teorema lui Menelaus aplicată pentru transversala (M_a, B_a, A') în triunghiul $AH_a M$ obținem:

$$\frac{A'A}{A'H_a} \cdot \frac{MM_a}{M_a A} \cdot \frac{G_a H_a}{G_a M} = 1, \text{ de unde } \frac{A'A}{A'H_a} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, \text{ adică } A'A \equiv A'H_a, \text{ deci } A' \text{ este}$$

mijlocul înălțimii $A'H_a$, rezultă că $A'H_a$ este o dreaptă Schwatt. Analog, se arată că

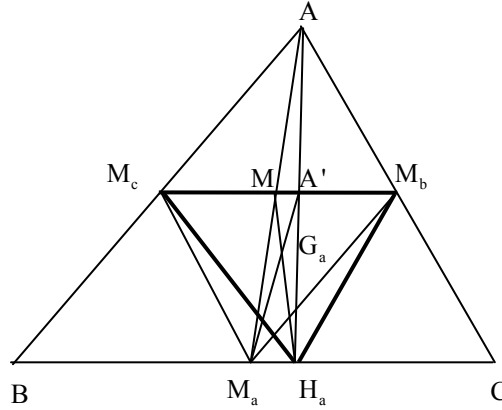


Fig. 406

$M_b G_b$ și $M_c G_c$, sunt drepte Schwatt și conform teoremei lui Schömilch, dreptele $M_a G_a$, $M_b G_b$, $M_c G_c$ sunt concurente în punctul lui Lemoine (K) al triunghiului ABC .

3) Centrele cercurilor înscrise în triunghiurile altimediale ale triunghiului ABC determină un triunghi omologic cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $H_a M_b M_c, H_b M_c M_a, H_c M_a M_b$,
 $\{A'\} = AI_1 \cap BC$, $\{B'\} = BI_2 \cap AC$,
 $\{C'\} = CI_3 \cap AB$, $m(\angle M_c I_1 A'') = \alpha$,
 $m(\angle M_b I_1 A'') = \beta$ (Fig.407). Deoarece

$$M_c M_b \parallel BC \text{ rezultă } \frac{BA'}{A'C} = \frac{M_c A''}{M_b A''} \quad (1).$$

Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile $M_c A'' I_1$ și $M_b A'' I_1$

$$\text{rezultă : } \frac{M_c A''}{\sin \alpha} = \frac{A'' I_1}{\sin \frac{B}{2}}, \quad \text{respectiv}$$

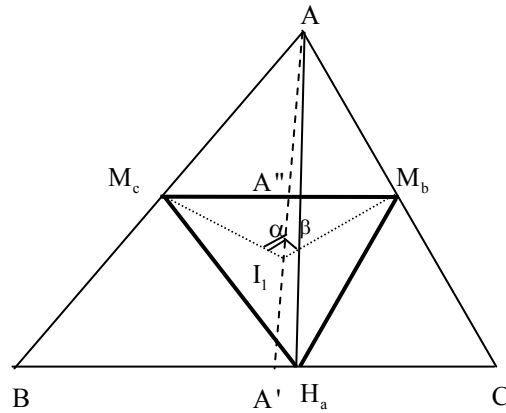


Fig. 407

$$\frac{M_b A''}{\sin \beta} = \frac{A'' I_1}{\sin \frac{C}{2}}, \text{ de unde } \frac{M_c A''}{M_b A''} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \quad (2). \text{ Teorema sinusurilor aplicată în}$$

triunghiurile $AM_c I_1$ și $AM_b I_1$ ne dă: $\frac{\sin \alpha}{AM_c} = \frac{\sin \frac{3B}{2}}{AI_1}$, respectiv $\frac{\sin \beta}{AM_b} = \frac{\sin \frac{3C}{2}}{AI_1}$, de unde

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{3B}{2}}{\sin \frac{3C}{2}} \cdot \frac{c}{b} \quad (3). \text{ Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă } \frac{BA'}{A'C} = \frac{\sin \frac{3B}{2}}{\sin \frac{3C}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{c}{b}.$$

$$\text{Analog, } \frac{CB'}{B'A} = \frac{\sin \frac{3C}{2}}{\sin \frac{3A}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \cdot \frac{a}{c} \quad \text{și} \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{\sin \frac{3A}{2}}{\sin \frac{3B}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{b}{a}, \quad \text{de unde}$$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \text{ și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele } AI_1, BI_2, CI_3$$

sunt concurente, deci triunghiurile ABC și $I_1 I_2 I_3$ sunt omologice.

III.14. Triunghiurile lui Brocard. Cercul lui Brocard¹⁸⁷

„Operele matematice robesc și încântă tocmai ca operele pasiunii și imaginației.” - Ion Barbu

Fie K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC . Paralele duse prin K la laturile BC, CA, AB intersectează mediatoarele acestor laturi în punctele A_1, B_1 , respectiv C_1 . Triunghiul $A_1 B_1 C_1$ se numește **primul triunghi al lui Brocard**. Fie A_2, B_2, C_2 proiecțiile punctului O - centrul cercului circumscris triunghiului ABC - pe simedianele duse din vârfurile A, B, C . Triunghiul $A_2 B_2 C_2$ se numește **al doilea triunghi al lui Brocard**. Cercul având diametru segmentul OK se numește **cercul lui Brocard**. Două triunghiuri care au același unghi Brocard se numesc **echibrocardiene**.

1) Cercul lui Brocard este circumscris triunghiurilor lui Brocard.

Demonstrație. Deoarece $m(\angle K A_1 O) = m(\angle K B_1 O) = m(\angle K C_1 O) = 90^\circ$ rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 aparțin cercului lui Brocard. Analog pentru punctele A_2, B_2, C_2 .

2) Triunghiurile $AB_1 C, BC_1 A, CA_1 B$ sunt isoscele și asemenea.

Demonstrație. Deoarece punctele A_1, B_1, C_1 aparțin mediatoarelor laturilor triunghiului ABC , rezultă că triunghiurile $AB_1 C, BC_1 A, CA_1 B$ sunt isoscele. Deoarece $A_1 M_a, B_1 M_b, C_1 M_c$ sunt egale cu distanțele de la K la laturile BC, CA, AB , rezultă

¹⁸⁷ Henri Brocard (1845-1922) – matematician francez, contribuții importante în geometrie

$\frac{A_1 M_a}{a} = \frac{B_1 M_b}{b} = \frac{C_1 M_c}{c}$ (unde M_a, M_b, M_c sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB), adică $\frac{A_1 M_a}{BM_a} = \frac{B_1 M_b}{CM_b} = \frac{C_1 M_c}{AM_c}$ și cum $m(\angle BM_a A_1) = m(\angle CM_b B_1) = m(\angle AM_c C_1) = 90^\circ$, rezultă că triunghiurile $BM_a A_1$, $CM_b B_1$ și $AM_c C_1$ sunt asemenea. Atunci, triunghiurile $BA_1 C$, $CB_1 A$ și $AC_1 B$ sunt asemenea.

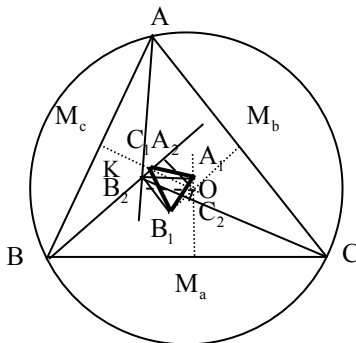


Fig. 408

3) Dreptele $A_1 B, B_1 C$ și $C_1 A$ sunt concurente într-un punct Brocard.

Demonstrație. În triunghiul $BA_1 M_a$ avem: $tg(\angle A_1 B M_a) = \frac{A_1 M_a}{BM_a} = \frac{KK_1}{BC/2} = tg\omega$, (unde K_1 este proiecția lui K pe BC), deci $\angle A_1 B M_a$ este egal cu unghiul lui Brocard ω , de unde rezultă că $A_1 B, B_1 C, C_1 A$ sunt ceviane ce determină unul din punctele lui Brocard.

4) Dreptele AB_1, BC_1, CA_1 sunt concurente într-un punct Brocard.

Demonstrație: În triunghiul $AB_1 M_b$ avem: $tg(\angle B_1 A M_b) = \frac{B_1 M_b}{AM_b} = \frac{KK_2}{AC/2} = tg\omega$ (unde K_2 este proiecția lui K pe AC), deci $\angle B_1 A M_b$ este egal cu unghiul lui Brocard, adică $A_1 B, B_1 C, C_1 A$ sunt ceviane ce determină unul din punctele lui Brocard.

Observație: Dacă $\{\Omega\} = A_1 B \cap B_1 C \cap C_1 A$, atunci $\{\Omega'\} = A_1 B \cap B_1 C \cap C_1 A$; dacă $\{\Omega\} = A_1 B \cap B_1 C \cap C_1 A$ atunci $\{\Omega'\} = A_1 B \cap B_1 C \cap C_1 A$.

5) Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Demonstrație. Fie $\{B'\} = KA_1 \cap AC, \{C'\} = KA_1 \cap AB$, L mijlocul segmentului OK . Deoarece punctele B' și C' sunt puncte pe al doilea cerc al lui Lemoine (cu centrul în punctul L) rezultă că proiecția lui L pe coarda $B'C'$ este punctul A'' - mijlocul acestui segment (1). În triunghiul dreptunghic KOA_1 , ($m(\angle KA_1 O) = 90^\circ$), LA'' este linie mijlocie, deci A'' este și mijlocul segmentului KA_1 (2). Din relațiile (1) și (2) obținem că $C'K = A_1 B'$, deci dreapta AA_1 este dreapta izotomică simedianei AK . Analog se arată că

BB_1 și CC_1 sunt izotomicile simedianelor concurente în punctul izotomic punctului lui Lemoine Ω'' .

Observații:

- i) Punctul de concurență al dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 se numește **al treilea punct al lui Brocard** corespunzător triunghiului ABC .
- ii) Din cele prezentate mai sus se poate spune că primul triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$ este triomologic cu triunghiul ABC , centrele de omologie fiind punctele lui Brocard Ω, Ω' și izotomicul punctului lui Lemoine (al treilea punct al lui Brocard Ω'').

6) Primul triunghi Brocard $A_1B_1C_1$ al triunghiului ABC este asemenea cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Avem $m(\sphericalangle A\Omega B) = 180^\circ - m(\sphericalangle B)$ (vezi „Punctele lui Brocard”), deci $m(\sphericalangle C_1\Omega A_1) = m(\sphericalangle C_1B_1A_1) = m(\sphericalangle B)$ (1); $m(\sphericalangle B\Omega C) = 180^\circ - m(\sphericalangle C)$, de unde: $m(\sphericalangle B_1\Omega A_1) = m(\sphericalangle B_1C_1A_1) = m(\sphericalangle C)$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt asemenea.

7) Primul triunghi al lui Brocard al unui triunghi ABC , triunghiul $\Omega\Omega'\Omega''$ și triunghiul ABC au același centru de greutate.

Demonstrație. Vezi „Triunghiuri omologice”.

8) Cercul lui Brocard trece prin punctele Brocard Ω și Ω' ale triunghiului ABC .

Demonstrație. Din proprietatea (2) rezultă că triunghiul A_1M_aC și B_1M_bA sunt asemenea, deci $\sphericalangle M_aA_1C \equiv \sphericalangle M_bB_1A \equiv \sphericalangle OB_1\Omega'$, adică patrulaterul $A_1OB_1\Omega'$ este inscriptibil, deci Ω' aparține cercului lui Brocard. Analog se arată că Ω aparține cercului lui Brocard.

9) Punctele lui Brocard Ω și Ω' ale triunghiului ABC sunt simetrice față de diametrul OK .

Demonstrație. Avem $m(\sphericalangle \Omega OK) = m(\sphericalangle \Omega B_1K) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_2\Omega)$ și deoarece $KB_1 \perp AC$ rezultă $m(\sphericalangle \Omega B_1K) = m(\sphericalangle \Omega CA) = \omega$, deci $m(\sphericalangle \Omega OK) = \omega$. Analog, $m(\sphericalangle \Omega' OK) = m(\sphericalangle \Omega' A_1K) = m(\sphericalangle \Omega' CB) = \omega$, deci $\sphericalangle \Omega OK \equiv \sphericalangle \Omega' OK$, adică punctele Ω și Ω' sunt simetrice față de dreapta OK .

10) Raza cercului lui Brocard este egală cu $R_\omega = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{2\cos\omega}$.

Demonstrație. În triunghiul dreptunghic $K\Omega O$ avem:

$$KO = \frac{\Omega O}{\cos\omega} = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{\cos\omega} = 2R_\omega, \text{ de unde raza cercului Brocard este egală cu}$$

$$R_\omega = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{2\cos\omega}.$$

11) Raza cercului lui Brocard este egală cu $R_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$

Demonstrație. Deoarece $OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$ (vezi „Punctul lui Lemoine”) rezultă

$$R_\omega = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}.$$

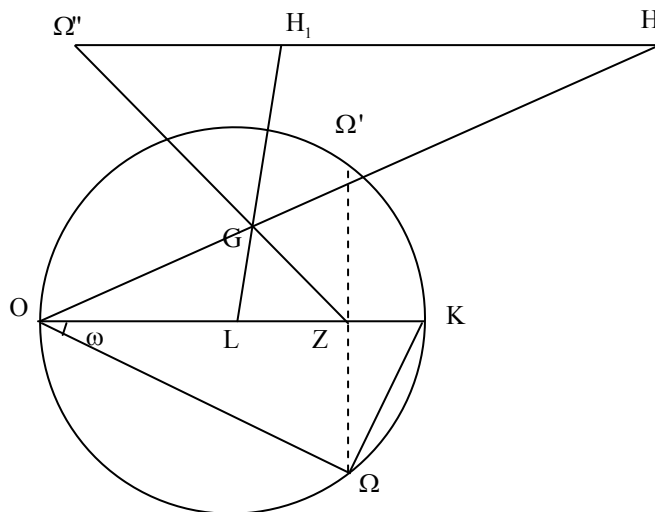


Fig. 409

12) Fie H ortocentrul triunghiului ABC și Ω" al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC. Atunci, $H\Omega'' \perp OK$.

Demonstrație. Fie $\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$ (Fig. 409). Deoarece G este centrul de greutate al triunghiurilor ABC și $\Omega\Omega'\Omega''$ rezultă $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$ și $\frac{GZ}{G\Omega''} = \frac{1}{2}$, de unde obținem $H\Omega'' \perp OK$.

13) Fie H ortocentrul triunghiului ABC și Ω" al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC. Atunci, $H\Omega'' = 2R \cos \omega \sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}$.

Demonstrație. Fie $\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$. Din triunghiul $O\Omega Z$ rezultă $OZ = O\Omega \cos \omega = R \cos \omega \sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}$, deci $H\Omega'' = 2OZ = 2R \cos \omega \sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}$ (Cf. th. 12).

14) Ortocentrul primului triunghi Brocard aparține dreptei $H\Omega''$.

Demonstrație. Fie L centrul cercului lui Brocard și $\{H_1\} = LG \cap H\Omega''$. Deoarece L este centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ și G centrul său de greutate rezultă că dreapta LG este dreapta lui Euler a primului triunghi Brocard. Cum $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2} = \frac{LG}{GH_1}$, rezultă că H_1 este ortocentrul primului triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$.

15) Consecință: Patrulaterul KOH_1H este paralelogram.

Demonstrație. Deoarece $HH_1 \square OK$ și $HH_1 = 2LO = OK$ rezultă că KOH_1H este paralelogram.

16) Consecință: Centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC aparține dreptei KH_1 .

Demonstrație. Deoarece într-un paralelogram diagonalele se înjumătățesc rezultă concluzia.

17) Punctul lui Tarry, centrul de greutate și centrul cercului lui Brocard corespunzător unui triunghi ABC sunt coliniare.

Demonstrație. Din asemănarea poligoanelor $TACSB$ și $OA_1C_1KB_1$ (cf. th. 4 – „Punctul lui Tarry”), punctele G, O, T se corespund cu punctele G, L , respectiv O și de aici rezultă $\square OGT \equiv \square EGO$, deci punctele T, L, G sunt coliniare.

18) Fie L centrul cercului lui Brocard, G centrul de greutate, T punctul lui Tarry și O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC . Atunci, $OG^2 = GL \cdot GT$.

Demonstrație. Deoarece punctele G, O, T respectiv G, L, O formează figuri omoloage, rezultă $\frac{GO}{GL} = \frac{GT}{GO}$, deci $OG^2 = GL \cdot GT$.

19) Fie L centrul cercului lui Brocard, G centrul de greutate, T punctul lui Tarry și O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC . Atunci, $GT = \frac{R \cos \omega}{\sqrt{1-4\sin^2 \omega}} \cdot GO$.

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor GLO și GOT rezultă $\frac{GO}{GT} = \frac{GL}{GO} = \frac{LO}{OT} = \frac{R_\omega}{R}$

(Fig. 409), deci $GT = \frac{R}{R_\omega} \cdot GO = \frac{R \cos \omega}{\sqrt{1-4\sin^2 \omega}} \cdot GO$.

20) Al treilea punct Brocard Ω'' aparține dreptei ce unește punctele lui Steiner și Tarry corespunzătoare unui triunghi ABC .

Demonstrație. Fie H_1 ortocentrul primului triunghi al lui Brocard și

$\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$ (Fig.409). Atunci, $\frac{H_1\Omega''}{ZL} = \frac{H_1G}{GL} = 2$, iar $ZL = OZ - OL =$

$R \cos \omega \sqrt{1-4\sin^2 \omega} - \frac{R\sqrt{1-4\sin^2 \omega}}{2 \cos \omega} = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2 \omega}}{2 \cos \omega} \cdot \cos 2\omega$ și de aici $H_1\Omega'' = 2LZ$.

Avem: $\frac{H_1T}{LT} = \frac{TG+2GL}{GT-LG}$; din $\frac{GT}{GL} = \frac{R^2}{R_\omega^2}$ rezultă $\frac{TG+2GL}{GL} = \frac{R^2+2R_\omega^2}{R_\omega^2}$ și

$\frac{TG-GL}{GL} = \frac{R^2-R_\omega^2}{R_\omega^2}$, de unde $\frac{H_1T}{LT} = \frac{R^2+2R_\omega^2}{R^2-R_\omega^2} = 2 \cos 2\omega$. Dar $\frac{H_1\Omega''}{LO} = 2 \cos 2\omega$, deci

$\frac{H_1\Omega''}{LO} = \frac{H_1T}{LT}$ și cum $H_1\Omega'' \square LO$ rezultă că Ω'' aparține dreptei TO .

21) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și Ω'' al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC . Atunci, $O\Omega'' = R(2 \cos 2\omega - 1)$.

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor $\Omega''H_1T$ și OLT rezultă $\frac{T\Omega''}{TO} = \frac{H_1T}{LT} = 2 \cos 2\omega$ și de aici $\frac{T\Omega'' - TO}{TO} = 2 \cos 2\omega - 1$ sau $O\Omega'' = R(2 \cos 2\omega - 1)$.

22) Dreapta $O\Omega$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $S\Omega\Omega''$, unde S este punctul lui Steiner corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Din $O\Omega'' \cdot OS = R^2(2 \cos 2\omega - 1) = O\Omega^2$ rezultă concluzia.

23) Dreapta $O\Omega'$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $S\Omega'\Omega''$, unde S este punctul lui Steiner corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Din $O\Omega'' \cdot OS = R^2(2 \cos 2\omega - 1) = O\Omega'^2$ rezultă concluzia.

24) Paralelele duse prin vârfurile unui triunghi la laturile respective ale primului triunghi Brocard sunt concurente într-un punct situat pe cercul circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Steiner”.

25) Punctele lui Steiner (S) și Lemoine (K) al triunghiului ABC sunt puncte omoloage în triunghiul ABC , respectiv $A_1B_1C_1$ - primul triunghi Brocard al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Steiner”.

26) Perpendicularele duse din vârfurile triunghiului ABC pe laturile opuse ale primului triunghi Brocard corespunzător triunghiului ABC sunt concurente în punctul lui Tarry al triunghiului ABC

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Tarry”.

27) Consecință: Perpendicularele duse din mijloacele laturilor primului triunghi Brocard corespunzător triunghiului ABC pe laturile respective ale triunghiului ABC ale sunt concurente.

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă .

28) Punctele A_2, B_2, C_2 aparțin cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA, AOB .

Demonstrație. Deoarece două simediane exterioare și o simediana interioară ale unui triunghi sunt concurente (vezi „Simediana exterioară”), atunci simediana AK și tangentele în B , respectiv C la cercul circumscris triunghiului ABC sunt concurente în punctul T_A (Fig. 410). Deoarece $m(\angle OCT_A) = 90^\circ$ rezultă că OT_A este diametru în cercul circumscris triunghiului BOC . Deoarece $OA_2 \perp AT_A$ rezultă $m(\angle OA_2T_A) = 90^\circ$, adică A_2 este punct pe cercul circumscris triunghiului BOC . Analog se arată că B_2 și C_2 sunt pe cercurile circumscrise triunghiurilor COA , respectiv AOB .

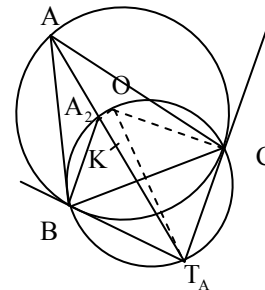


Fig. 410

Un cerc care trece prin două vârfuri ale unui triunghi și este tangent la una din laturile triunghiului se numește **cerc adjunct**.

29) Punctul A_2 se află la intersecția cercurilor adjunkte vârfului A .

Demonstrație. Deoarece $\square BA_2T_A \equiv \square BCT_A \equiv \square BAC$ rezultă că cercul circumscris triunghiului BA_2A este tangent în A laturii AC . Analog, cercul circumscris triunghiului CA_2A este tangent în A laturii AB .

Observații:

- 1) Punctele B_2 și C_2 se află la intersecția cercurilor adjunkte vârfulor B , respectiv C .
- 2) Vârfurile celui de-al doilea triunghi Brocard al triunghiului ABC sunt intersecțiile dintre cercurile adjunkte corespunzătoare vârfulor A, B, C .

30) Coordonatele unghiulare ale vârfulor celui de al doilea triunghi Brocard $A_2B_2C_2$ sunt:

$(180^\circ - m(\square A), 2m(\square A), 180^\circ - m(\square A)), ((180^\circ - m(\square B), 180^\circ - m(\square B), 2m(\square B)),$
respectiv $(2m(\square C), 180^\circ - m(\square C), 180^\circ - m(\square C)).$

Demonstrație. Avem $m(\square BA_2A) = 180^\circ - m(\square BA_2T_A) = 180^\circ - m(\square A)$,
 $m(\square CA_2A) = 180^\circ - m(\square T_A A_2 C) = 180^\circ - m(\square A)$, iar
 $m(\square BA_2C) = 360^\circ - [m(\square BA_2A) + m(\square CA_2A)] = 2m(\square A)$. Analog se determină coordonatele unghiulare ale vârfulor B_2 și C_2 .

31) Cercul Brocard și primul cerc Lemoine sunt concentrice.

Demonstrația este evidentă deoarece ambele cercuri au centrul în punctul L , mijlocul segmentului OK .

III.15. Triunghiul antiparalel determinat de o direcție în raport cu un triunghi

„Mă stimez mai mult ca practicant al matematicilor și prea puțin ca poet, și numai atât cât poezia amintește de geometrie. Oricât ar părea de contradictorii acești doi termeni la prima vedere, există undeva, în domeniul înalt al geometriei, un loc luminos unde se întâlnește cu poezia.” – Ion Barbu¹⁸⁸

În triunghiul ABC , fie A', B', C' proiecțiile punctelor A, B, C pe o dreaptă oarecare d , $\{D\} = BC \cap d$, $\{E\} = CA \cap d$, $\{F\} = AB \cap d$. Fie M și M' , N și N' , P și P' proiecțiile punctelor A', B' , respectiv C' pe laturile AC și AB , BA și BC , respectiv CB și CA . Dreptele MM', NN', PP' - antiparalele dreptei d față de laturile triunghiului ABC - determină triunghiul XYZ care se numește **triunghiul antiparalel** al dreptei d în raport cu triunghiul ABC . Dacă antiparalele MM', NN', PP' sunt concurente atunci punctul Q de concurență al acestora se numește **antipol**. Evident există o unică dreaptă care este paralelă cu d și conține antipolul Q .

¹⁸⁸ Ion Barbu (1895-1961) – matematician român, profesor la Universitatea din București, contribuții în algebră și geometrie

cercului de diametru BB_1 . Analog, cercurile de diametre AA_1 și CC_1 trec respectiv prin punctele X și Z . Evident, proiecțiile A'', B'', C'' ale punctelor A, B , respectiv C pe dreapta d_1 aparțin – câte unul – cercurilor considerate. Deoarece $d \perp d_1, A'C_1 \perp C'A_1, A'A'' \perp C'C''$ rezultă $C_1A'' \equiv A_1C''$, adică segmentele A_1A'' și C_1C'' au același mijloc. Analog, se arată că mijlocul segmentului B_1B'' coincide cu mijlocul segmentului A_1A'' . Rezultă că linia centrelor este o dreaptă d' perpendiculară pe d , trecând prin mijlocul segmentelor A_1A'', B_1B'' și C_1C'' .

III.16. Triunghi automedian

„Există printre matematicieni o convingere intimă și puternică, care-i susține în cercetările lor abstracte, anume că niciuna dintre problemele lor nu pot rămâne fără răspuns.” – Gh. Țițeica¹⁸⁹

Se notează cu a, b, c lungimile laturilor BC, AC , respectiv AB ale triunghiului ABC și cu m_a, m_b, m_c lungimile medianelor corespunzătoare acestora. Triunghiul ABC ($AB \neq AC$) se numește **automedian** dacă $2a^2 = b^2 + c^2$ sau $2b^2 = c^2 + a^2$ sau $2c^2 = a^2 + b^2$. În cele ce urmează vom considera cazul în care $2a^2 = b^2 + c^2$.

1) Să se arate că un triunghi ABC este automedian dacă și numai dacă $bm_b = cm_c$.

Demonstrație. Relația $2a^2 = b^2 + c^2$ este echivalentă cu $(2a^2 - b^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0$ (deoarece $b \neq c$) sau $b^2(2a^2 + 2c^2 - b^2) = c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)$ sau $bm_b = cm_c$.

Observații:

i) Un triunghi este automedian dacă și numai dacă $\frac{m_b}{1/b} = \frac{m_c}{1/c}$.

ii) Ținând cont de proprietatea anterioară putem da următoarea definiție: „Un triunghi în care medianele și laturile corespunzătoare sunt invers proporționale se numește **automedian**.”

2) Triunghiul ABC este automedian dacă și numai dacă $2m_a = a\sqrt{3}$.

Demonstrație. Din $2a^2 = b^2 + c^2$ rezultă $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 3a^2$ egalitate echivalentă cu $2m_a = a\sqrt{3}$.

3) Dacă triunghiul ABC este automedian, atunci $2m_b = c\sqrt{3}$ și $2m_c = b\sqrt{3}$.

Demonstrație. Din formula medianei avem: $4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 = 3c^2$, de unde rezultă $2m_b = c\sqrt{3}$; analog se arată că $2m_c = b\sqrt{3}$.

¹⁸⁹ Gheorghe Țițeica (1873-1939) – matematician român, profesor la Universitatea din București, membru al Academiei Române, contribuții importante în geometrie

Observație: Din proprietățile 2) și 3) rezultă că într-un triunghi automedian este adevărată

relația: $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_c} = \frac{c}{m_b}$.

4) Într-un triunghi automedian avem : $2m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

Demonstrație. Deoarece într-un triunghi automedian sunt adevărate egalitățile $2m_b = c\sqrt{3}$, $2m_c = b\sqrt{3}$ și $2m_a = a\sqrt{3}$, atunci condiția $2a^2 = b^2 + c^2$ devine $2m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

5) Un triunghi automedian având lungimile laturilor numere întregi nu poate avea mediane de lungimi numere întregi.

Demonstrație. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_c} = \frac{c}{m_b} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, de unde rezultă că medianele au valori iraționale.

6) Un triunghi automedian având lungimile laturilor numere întregi nu poate avea aria egală cu un număr întreg.

Demonstrație. Din formula lui Heron rezultă: $16S^2 = 2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4$. Utilizând faptul că $2a^2 = b^2 + c^2$, relația de mai sus devine: $16S^2 = 4a^2b^2 - 2a^4 - b^4$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $(a, b) = 1$. Atunci, din relația precedentă rezultă $2|b$, deci $b = 2b_1, b_1 \in \mathbb{Z}$. Astfel, obținem $8S^2 = 8a^2b_1^2 - a^4 - 8b_1^4$, de unde rezultă $2|a$, contradicție cu $(a, b) = 1$.

7) Triunghiul ABC este automedian dacă și numai dacă $2ctgA = ctgB + ctgC$.

Demonstrație. Avem: $ctgA = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) \cdot R}{abc}$ și analogele. Atunci, relația $2ctgA = ctgB + ctgC$ este echivalentă cu $2(b^2 + c^2 - a^2) = (a^2 + c^2 - b^2) + (b^2 + c^2 - a^2)$ sau $2a^2 = b^2 + c^2$.

8) Într-un triunghi automedian ABC este adevărată relația: $tg\omega = \frac{1}{3}tgA$, unde ω este unghiul lui Brocard al triunghiului ABC.

Demonstrație. Deoarece triunghiul ABC este automedian rezultă $2ctgA = ctgB + ctgC$ și cum $ctg\omega = ctgA + ctgB + ctgC$ (vezi „Punctele lui Brocard”) avem : $ctg\omega = 3ctgA$ sau $tg\omega = \frac{1}{3}tgA$.

9) Într-un triunghi automedian ABC este adevărată relația $A_{[ABC]} = \frac{a^2}{2} \cdot tgA$.

Demonstrație: Avem $2a^2 = b^2 + c^2$ și $A_{[ABC]} = \frac{abc}{4R} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{abc}{R \cdot 2a^2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{abc}{R \cdot (b^2 + c^2 - a^2)} =$
 $\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{a^2}{2} \cdot \sin A \cdot \frac{1}{\cos A} = \frac{a^2}{2} \cdot tgA$

10) Într-un triunghi automedian ABC este adevărată relația $(r_a - r)(r_b + r_c) = 2(r_b r_c - r r_a)$.

Demonstrație: Se utilizează egalitățile: $2a^2 = b^2 + c^2$, $r_a r_b = p(p - c)$, $r r_a = (p - b)(p - c)$ și relațiile analoge.

11) Un triunghi isoscel automedian este echilateral.

Demonstrație. Dacă, de exemplu, $a = c$ rezultă $2a^2 = b^2 + a^2$, deci $a^2 = b^2$, de unde $a = b$, adică triunghiul este echilateral. Analog se tratează și celelalte cazuri.

12) Să se arate că triunghiul ABC este automedian dacă și numai dacă centrul de greutate G al triunghiului ABC este mijlocul segmentului AD , unde D este punctul în care mediana corespunzătoare laturii BC intersectează cercul circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și $AG \equiv GD$. Din puterea punctului G față de cercul circumscris triunghiului ABC , avem:

$$R^2 - OG^2 = AG^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}.$$

Utilizând relația $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ obținem: $2a^2 = b^2 + c^2$, adică

triunghiul ABC este automedian (Fig. 412). Reciproc, dacă triunghiul ABC este automedian rezultă $2a^2 = b^2 + c^2$. Avem: $R^2 - OG^2 = AG \cdot GD$ sau

$$\frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{2}{3}m_a \cdot GD, \quad \text{deci} \quad \frac{3a^2}{9} = \frac{2}{3}m_a \cdot GD, \quad \text{de unde rezultă}$$

$$GD = \frac{a^2}{2m_a} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}m_a = AG.$$

13) Dacă AM_a și BM_b sunt mediane în triunghiul automedian ABC , atunci $m(\widehat{BAM_a}) = m(\widehat{CBM_b})$.

Demonstrație. Avem $m(\widehat{BAM_a}) = m(\widehat{BCD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BD}) = m(\widehat{CBM_b})$, unde D este punctul de intersecție dintre mediana AM_a și cercul circumscris triunghiului ABC .

Consecință: Într-un triunghi automedian ABC , $BM_b \perp CD$, unde D este punctul de intersecție dintre mediana AM_a și cercul circumscris triunghiului ABC .

14) Triunghiul ABC este automedian dacă și numai dacă ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe mediana AM_a , $M_a \in (BC)$, în centrul de greutate (G) al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Avem

$$OM_a^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

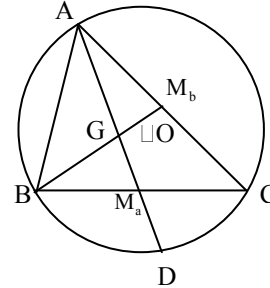


Fig. 412

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}, GM_a^2 = \left(\frac{1}{3}m_a\right)^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{36} \quad (1). \quad \text{Folosind ipoteza}$$

$b^2 + c^2 = 2a^2$ și faptul că punctele H, G, O sunt coliniare rezultă:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2}{3}, GM_a^2 = \frac{a^2}{12}, OM_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}, \text{ de unde } OG^2 + GM_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} = OM_a^2, \text{ adică}$$

triunghiul M_aGO este dreptunghic, deci H se proiectează pe mediana AM_a în G . Reciproc, dacă H se proiectează pe AM_a în G , atunci GM_aO este dreptunghic, adică $OM^2 = GO^2 + GM^2$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă $b^2 + c^2 = 2a^2$, adică triunghiul ABC este automedian.

15) Într-un triunghi automedian ABC ($2a^2 = b^2 + c^2$) dreapta lui Euler este perpendiculară pe mediana din A a triunghiului ABC .

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă, deoarece $HG \perp AM_a$.

16) În triunghiul ABC fie mediana AM_a , înălțimea CH_c , ($H_c \in AB$) și G centrul de greutate. Dacă triunghiul ABC este automedian, atunci cercul circumscris triunghiului BM_aH_c conține punctul G .

Demonstrație. Cum triunghiul ABC este automedian avem: $2a^2 = b^2 + c^2$ (Fig. 413). Din teorema lui Pitagora generalizată rezultă:

$$AH_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{2a^2 - a^2}{2c} = \frac{a^2}{2c}. \quad \text{Atunci,}$$

$$AB \cdot AH_c = \frac{a^2}{2}. \quad \text{Dar,} \quad AG \cdot AM_a = \frac{2}{3} \cdot AM_a^2 =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot a^2, \text{ adică } AB \cdot AH_c = AG \cdot AM_a$$

relație care arată că punctele B, H_c, G, M_a sunt conciclice.

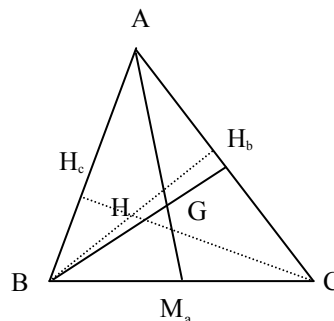


Fig. 413

17) În triunghiul ABC , fie H_b, H_c picioarele înălțimilor duse din B , respectiv C și M_a piciorul mediane din A . Dacă triunghiul ABC este automedian, atunci centrul de greutate al triunghiului ABC aparține cercului circumscris triunghiului CM_aH_b .

Demonstrație. Dreptele H_bH_c și BC fiind antiparalele rezultă :
 $AC \cdot AH_b = AB \cdot AH_c = AG \cdot AM_a$ (vezi aplicația precedentă) de unde rezultă concluzia.

III.17. Triunghi circumpedal

„Geometria este arta de a raționa corect pe figuri incorecte.” – Henri Poincaré¹⁹⁰

Fie D un punct în planul triunghiului ABC . Numim **triunghi circumpedal** (sau **metaarmonic**) al punctului D în raport cu triunghiul ABC , triunghiul a cărui vârfuri sunt punctele de intersecție ale cevianelor AD , BD și CD cu cercul circumscris triunghiului ABC (Fig. 414).

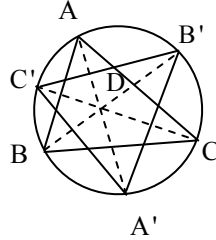


Fig. 414

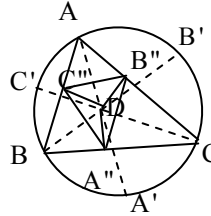


Fig. 415

1) Triunghiul circumpedal $A'B'C'$ și triunghiul podar $A''B''C''$ al unui punct D în raport cu un triunghi ABC sunt asemenea.

Demonstrație. Patrulateralele $DA''BC''$, $DA''CB''$, $ABA'B'$ și $ACA'C'$ sunt inscriptibile (Fig. 415), deci $\sphericalangle DA''B'' \equiv \sphericalangle DCB'' \equiv \sphericalangle C'CA \equiv \sphericalangle AA'C'$ și $\sphericalangle DA''C'' \equiv \sphericalangle DBC'' \equiv \sphericalangle B'BA \equiv \sphericalangle BA'A$. Dar $m(\sphericalangle DA''C'') + m(\sphericalangle DA''B'') = m(\sphericalangle B''A''C'')$, iar $m(\sphericalangle B'A'A) + m(\sphericalangle C'A'A) = m(\sphericalangle B'A'C')$, adică $m(\sphericalangle B''A''C'') = m(\sphericalangle B'A'C')$. Analog se arată că $m(\sphericalangle A''B''C'') = m(\sphericalangle A'B'C')$ adică triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt asemenea.

2) Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al unui punct D în raport cu un tringhi ABC , iar $A''B''C''$ triunghiul podar al acestui punct. Atunci: $A_{[A'B'C']} = 2R^2 \sin A'' \sin B'' \sin C''$.

Demonstrație. Deoarece triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt asemenea (cf. th. (1)) rezultă $B'C' = 2R \sin \overline{B} A'C' = 2R \sin \overline{B} A''C''$, $C'A' = 2R \sin \overline{A} B''C''$, $A'B' = 2R \sin \overline{A} C''B''$

(Fig. 415) Atunci, $A_{[A'B'C']} = \frac{B'A' \cdot A'C' \sin \overline{B} A'C'}{2} = 2R^2 \sin A'' \sin B'' \sin C''$.

3) Fie triunghiul ABC și $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris în triunghiul ABC . Atunci,

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[A'B'C']}} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{2r}{R} \quad (\text{unde } r \text{ este raza cercului}$$

înscris, iar R raza cercului circumscris în triunghiul ABC).

Demonstrație. Punctele A' , B' , C' sunt punctele de intersecție dintre bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC cu cercul

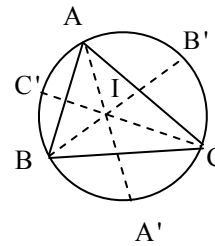


Fig. 416

¹⁹⁰ Henri Poincaré (1854-1912) – matematician și fizician francez, contribuții importante în toate ramurile matematicii

circumscriș. Deoarece $m(\square C'A'B') = \frac{1}{2}[m(\square B) + m(\square C)]$ și analoagele, avem:

$$A_{[A'B'C']} = 2R^2 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{A+C}{2} \sin \frac{A+B}{2} = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad \text{Cum}$$

$$A_{[ABC]} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 16R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad \text{rezultă}$$

$$\text{că } \frac{A_{[ABC]}}{A_{[A'B'C']}} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{2r}{R}.$$

4) Fie triunghiul ABC , $A''B''C''$ triunghiul circumpedal al ortocentrului triunghiului

ABC . Atunci $\frac{A_{[A''B''C'']}}{A_{[ABC]}} = \frac{2r''}{R}$, unde r'' este lungimea razei cercului înscris în triunghiul

$A''B''C''$.

Demonstrație.

Avem:

$$A_{[A''B''C'']} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 16R^2 \sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C, \text{ deci}$$

$$\frac{A_{[A''B''C'']}}{A_{[ABC]}} = 8 \cos A \cos B \cos C. \text{ Observând că } A''A, B''B, C''C \text{ sunt bisectoarele triunghiului}$$

$$A''B''C'' \text{ din teorema precedentă rezultă } \frac{A_{[A''B''C'']}}{A_{[ABC]}} = \frac{2r''}{R}.$$

Consecință:

5) $A_{[A''B''C'']} \leq A_{[ABC]} \leq A_{[A'B'C']}$, unde $A'B'C'$ și $A''B''C''$ reprezintă triunghiurile circumpedale ale centrului cercului înscris, respectiv al ortocentrului triunghiului ABC .

Demonstrație. Din inegalitatea lui Euler, $2r \leq R$ și relațiile $\frac{A_{[ABC]}}{A_{[A'B'C']}} = \frac{2r}{R}$,

$$\frac{A_{[A''B''C'']}}{A_{[ABC]}} = \frac{2r''}{R} \text{ obținem}$$

$$A_{[A''B''C'']} \leq A_{[ABC]} \leq A_{[A'B'C']} \text{ și de asemenea inegalitatea remarcabilă într-un triunghi}$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}.$$

6) Triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al ortocentrului H al unui triunghi ABC este omotetic cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC , centrul de omotetie fiind ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Conform teoremei (1) triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $A'B'C'$ sunt asemenea și deoarece $H_aA' \cap H_bB' \cap H_cC' = \{H\}$ rezultă că triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $A'B'C'$ omologice. Cum $HH_a \equiv H_aA'$, $HH_b \equiv H_bB'$, $HH_c \equiv H_cC'$ rezultă că H_aH_b, H_bH_c, H_cH_a sunt linii mijlocii în triunghiurile $A'B'H, B'C'H$, respectiv $C'A'H$ rezultă $H_aH_b \parallel A'B', H_bH_c \parallel B'C'$, respectiv $H_cH_a \parallel C'A'$, deci triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $A'B'C'$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind punctul H , iar raportul de omotetie fiind egal cu 2.

7) Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris I în triunghiul ABC și $C_aC_bC_c$ triunghiul său de contact. Atunci, dreptele $A'C_a, B'C_b, C'C_c$ sunt concurente.

Demonstrație. Fie M un punct pe dreapta IO astfel încât $\overline{MO} = \frac{R}{r} \overline{MI}$. Prin omotetia de centru M și raport $\frac{R}{r}$ cercul $\mathcal{C}(I, r)$ se transformă în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ (Fig. 417). Atunci I se transformă în O și dreapta IC_a se transformă în dreapta paralelă OA' , de unde rezultă că punctul A' este omoteticul punctului C_a prin omotetia considerată. Analog prin omotetia $H\left(M, \frac{R}{r}\right)$ se corespund punctele B' și C_b respectiv C' și C_c , deci dreptele $A'C_a, B'C_b, C'C_c$ sunt concurente în punctul M .

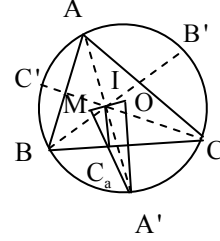


Fig. 417

Observație: Avem: $MI = \frac{r\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R - r}$ și $MO = \frac{R\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R - r}$.

Demonstrație: Deoarece $MO = \frac{R}{r} MI, OI = MO - MI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (relația lui Euler)

avem: $MI = \frac{r}{R - r} OI$ și $MO = \frac{R}{R - r} OI$, de unde rezultă concluzia.

8) Ortocentrul triunghiului circumpedal $A'B'C'$ al centrului cercului înscris I în triunghiul ABC este punctul I .

Demonstrație. Vezi „Cercul înscris”.

9) Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris în triunghiul ABC și A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC . Atunci,

$$\frac{1}{\sqrt{A'A_1}} + \frac{1}{\sqrt{B'B_1}} + \frac{1}{\sqrt{C'C_1}} \geq \sqrt{\frac{18}{R}}.$$

Demonstrație. Din puterea punctului A_1 față de cercul circumscris rezultă

$$A_1A' \cdot A_1A = A_1B \cdot A_1C, \text{ de unde } A_1A' = \frac{a^2 l_a}{(b+c)^2 - a^2} \text{ unde } l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2} (= AA_1). \text{ Atunci,}$$

$$\frac{A_1A'}{AA_1} = \frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2}, \text{ de unde } \frac{A_1A'}{AA_1} = \left(\frac{a}{b+c} \right)^2, \text{ deci } \sqrt{A'A_1} = \frac{a}{b+c} \sqrt{AA_1} \leq \frac{a}{b+c} \sqrt{2R}.$$

$$\text{Avem: } \frac{1}{\sqrt{A'A_1}} + \frac{1}{\sqrt{B'B_1}} + \frac{1}{\sqrt{C'C_1}} \geq$$

$$\frac{1}{2R} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+c}{c} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{2R}} \left[\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \right] \geq \frac{6}{\sqrt{2R}} = \sqrt{\frac{18}{R}}.$$

10) Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris I în triunghiul ABC . Atunci, $IA \cdot IC = 2r \cdot IB'$ și $IA' \cdot IC' = R \cdot IB$.

Demonstrație. Deoarece B' este centrul cercului circumscris triunghiului AIC (vezi „Teorema lui Beltrami”-Cecuri exînscrise) rezultă $IA = 2IB' \cdot \sin \angle ACI = 2IB' \cdot \frac{r}{IC}$, deci $IA \cdot IC = 2r \cdot IB' = r \cdot II_a$ (unde I_a este centrul cercului exînscriș). Deoarece $m(\angle B'C'I) = m(\angle BIC') = 180^\circ - m(\angle BIC)$, $m(\angle BC'I) = m(\angle BAC)$ rezultă $\frac{IC'}{BC} = \frac{BI}{BC} \cdot \frac{IC'}{BI} = \frac{\sin \angle BCI}{\sin \angle BIC} \cdot \frac{\sin \angle B'C'I}{\sin \angle BC'I} = \frac{\sin \angle BCI}{\sin \angle BAC}$ și cum $IB = 2IA' \cdot \sin \angle BCM$ obținem $IA' \cdot IC' = R \cdot IB$.

11) Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris (I) în triunghiul ABC în raport cu acest triunghi și d_a, d_b, d_c distanțele dintre punctele A', B', C' respectiv la dreptele BC, CA, AB și r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrișcorespunzătoare triunghiului ABC . Atunci, $\frac{d_a}{r_a} + \frac{d_b}{r_b} + \frac{d_c}{r_c} = 1$.

Demonstrație. Deoarece A' este mijlocul arcului $\widehat{BC}$, avem $A'B \equiv A'C$, de unde rezultă proiecția lui A' pe BC este punctul M_a , mijlocul segmentului BC (Fig. 418). Din

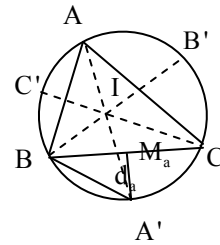


Fig. 418

teorema sinusurilor rezultă $A'B = 2R \sin \frac{A}{2}$,

$M_a A' = A'B \sin \angle A' B M_a = A'B \sin \frac{A}{2} = 2R \sin^2 \frac{A}{2} = d_a$. Cum

$r_a = p \cdot \tan \frac{A}{2}$ avem: $\frac{d_a}{r_a} = \frac{2R}{p} \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{R \sin A}{p}$, de

unde: $\frac{d_a}{r_a} + \frac{d_b}{r_b} + \frac{d_c}{r_c} = \frac{R \sin A + R \sin B + R \sin C}{p} = 1$.

12) Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris I în triunghiul ABC , $\{N\} = A'B' \cap BC$, $\{M\} = A'C' \cap BC$, $\{P\} = A'B' \cap AC$, $\{S\} = A'C' \cap AB$, $\{R\} = B'C' \cap AB$, $\{Q\} = B'C' \cap AC$.

Dreptele MQ, NR și PS sunt concurente.

Demonstrație. Patrulaterul $ABA'C'$ fiind inscriptibil, din teorema lui Ptolemeu obținem $AA' \cdot BC = BA' \cdot AC + A'C' \cdot AB$ și

cum $BA' \equiv A'C'$ rezultă $\frac{AA'}{BA'} = \frac{AB + AC}{BC}$ (1) (Fig. 419). Dacă

$\{D\} = AA' \cap BC$ din teorema bisectoarei în triunghiul ABD ,

obținem: $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD}$. Cum $BD = \frac{BC \cdot AB}{AB + AC}$ rezultă

$\frac{AI}{ID} = \frac{AB + AC}{BC}$. Din teorema bisectoarei pentru triunghiul

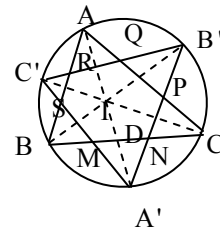


Fig. 419

$AA'B$ avem: $\frac{AS}{BS} = \frac{AA'}{BA'} = \frac{AB + AC}{BC}$ (din relația 1), de unde

$\frac{AI}{ID} = \frac{AS}{BS}$, deci $SI \parallel BC$. Analog $IP \parallel BC$, deci $I \in SP$. La fel se arată că punctul I aparține dreptelor RN și MQ .

13) Triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al punctului lui Lemoine al triunghiului ABC are aceleași simediane ca triunghiul ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiuri cosimediane”.

14) Triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al punctului lui Lemoine al triunghiului ABC are laturile proporționale cu medianele triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiuri cosimediane”.

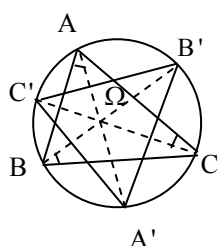


Fig. 420

15) Triunghiul circumpedal al unui punct al lui Brocard al triunghiului ABC este congruent cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al punctului Ω al lui Brocard al triunghiului ABC (Fig. 420).

Deoarece $m(\angle A' A) = m(\angle C' A) = m(\angle B' B C)$ și $m(\angle B' A' A) = m(\angle B' B A)$ rezultă că $m(\angle A' A' B') = m(\angle C B A)$, deci $B' C' \equiv AC$. Analog se arată că $C' A' \equiv AB$ și $A' B' \equiv BC$, deci triunghiurile ABC și $C' A' B'$ sunt congruente.

16) Fie $A_1 B_1 C_1$ triunghiul circumpedal al centrului cercului circumscris (O) al unui triunghi ABC în raport cu acest triunghi, $M_a M_b M_c$ triunghiul median al triunghiului ABC . Dacă punctele S_a, S_b, S_c împart segmentele orientate $\overrightarrow{A_1 M_a}, \overrightarrow{B_1 M_b}, \overrightarrow{C_1 M_c}$ în același raport $k \in \mathbb{Q} \setminus \{1; 4/3\}$, atunci dreptele AS_a, BS_b, CS_c sunt concurente într-un punct situat pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .

Demonstrație. Considerăm un reper cartezian cu originea în O (Fig. 421).

Avem: $\overrightarrow{OS_a} = \frac{\overrightarrow{OA_1} - k \overrightarrow{OM_a}}{1-k} = \frac{1}{k-1} \left[\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right]$. Fie un punct Q pe dreapta AS_a

astfel încât $\frac{QA}{QS_a} = l$. Avem $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1-l} [\overrightarrow{OA} - l \overrightarrow{OS_a}]$,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1-l} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{(1-l)(k-1)} \left[\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right],$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1+l-k}{(1-l)(1-k)} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{lk}{2(1-l)(1-k)} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{lk}{2(1-l)(1-k)} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Determinăm pe $l \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ astfel încât $\overrightarrow{OQ}$ să aibă o scriere simetrică în raport cu vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

Atunci, $2(1+l-k) = lk$, sau $l = \frac{2-2k}{k-2}$ (cu $l=1$ dacă și numai dacă $k=4/3$). Pentru

$l = \frac{2-2k}{k-2}$ obținem: $\overrightarrow{OQ} = \frac{k}{3k-4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Considerăm $Q' \in BS_b$, $Q'' \in CS_c$ care

împart vectorii corespunzători în același raport l , rezultă $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ''} = \overrightarrow{OQ}$, adică

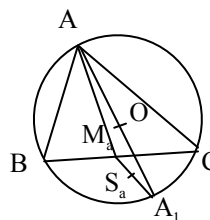


Fig. 421

$Q \equiv Q' \equiv Q''$, deci există un punct comun dreptelor AS_a, BS_b, CS_c dacă $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ rezultă că punctele Q, O și G sunt coliniare.

Observații:

- 1) Dacă $k = \frac{4}{3}$ dreptele AS_a, BS_b, CS_c sunt paralele cu dreapta lui Euler.
- 2) Dacă $k = 2$, atunci $S_a \equiv S_b \equiv S_c \equiv H$ și Q este ortocentrul triunghiului.

III.18. Triunghiul simedian

„Natura vorbește în limba matematicii: literele sunt cercurile, triunghiurile și alte figuri geometrice.” – Galileo Galilei¹⁹¹

Triunghiul $K_a K_b K_c$ determinat de intersecțiile simedianelor cu laturile triunghiului ABC se numește **triunghi simedian**.

1) Dacă K este punctul lui Lemoine al triunghiului ABC și $K_a K_b K_c$ triunghiul simedian

al acestuia, atunci $\frac{AK}{KK_a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$.

Demonstrație. Din teorema lui Van-Aubel

rezultă: $\frac{AK}{KK_a} = \frac{AK_c}{K_c B} + \frac{AK_b}{K_b C}$, adică

$$\frac{AK}{KK_a} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Observație: Prin permutări circulare se obțin

relațiile: $\frac{BK}{KK_b} = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$ și $\frac{CK}{KK_c} = \frac{b^2 + a^2}{c^2}$.

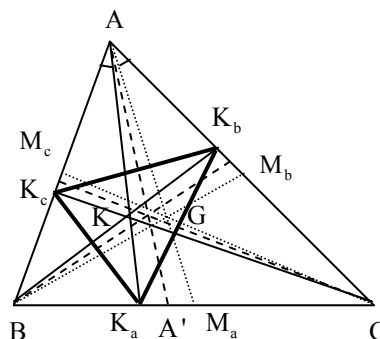


Fig. 422

2) Aria triunghiului simedian $K_a K_b K_c$ este egală cu:

$$A_{[K_a K_b K_c]} = \frac{2a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \cdot A_{[ABC]}.$$

Demonstrație. Avem $\frac{A_{[K_a K_b K_c]}}{A_{[ABC]}} = \frac{AK_b \cdot AK_c \cdot \sin A}{AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{AK_b \cdot AK_c}{AB \cdot AC} = \frac{b^2 - c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}$ (1).

Analog, $\frac{A_{[BK_a K_c]}}{A_{[ABC]}} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}$ (2) și $\frac{A_{[CK_a K_b]}}{A_{[ABC]}} = \frac{a^2 c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}$ (3), iar

¹⁹¹ Galileo Galilei (1564-1642) – matematician, fizician, astronom și filosof italian

$A_{[K_a K_b K_c]} = A_{[ABC]} - A_{[AK_b K_c]} - A_{[K_a B K_c]} - A_{[K_a K_b C]}$ (4). Din relațiile (1), (2), (3) și (4) rezultă

$$A_{[K_a K_b K_c]} = \frac{2a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \cdot A_{[ABC]}.$$

3) Aria triunghiului simedian ABC este maximă, atunci când triunghiul ABC este echilateral.

Demonstrație. $A_{[K_a K_b K_c]}$ este maximă, atunci când raportul $\frac{2a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}$ este

maxim. Utilizând inegalitatea mediilor $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$ pentru $x, y \geq 0$ obținem:

$$\frac{2a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \leq \frac{2a^2 b^2 c^2}{8a^2 b^2 c^2} = \frac{1}{4}.$$

Egalitatea se obține pentru $a = b = c$, dacă triunghiul ABC este echilateral și $K_a K_b K_c$ este triunghiul median al triunghiului ABC .

4) Coordonatele trilinare ale vârfurilor triunghiului simedian $K_a K_b K_c$ sunt: $K_a(0, b, c)$, $K_b(a, 0, c)$, $K_c(a, b, 0)$.

Demonstrație. Vezi [26].

III.19. Triunghiul Δ_{60°

„În zadar vor matematicienii să ascundă: ei nu demonstrează, ci combină și numai izbindu-se dintr-o parte în alta ajung la adevăr.”¹⁹² - Evariste Galois

Notăm cu Δ_{60° un triunghi ABC care are un unghi de 60° , ($m(\hat{A}) = 60^\circ$), H_a, H_b, H_c proiecțiile vârfurilor A, B, C pe laturi; A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare, M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor triunghiului ABC , O centrul cercului circumscris triunghiului ABC (Fig. 423).

1) Într-un triunghi Δ_{60° avem: $m(\hat{H}_c M_a H_b) = 60^\circ$.

Demonstrație. Deoarece $H_c M_a \equiv H_b M_a \left(= \frac{BC}{2} \right)$, rezultă că triunghiul $H_c M_a B$ este

isoscel, deci $m(\hat{H}_c M_a B) = 180^\circ - 2m(\hat{B})$, dar cum $m(\hat{H}_b H_a H_c) = 180^\circ - 2m(\hat{B})$, avem

că $\hat{H}_c M_a B \equiv \hat{H}_b H_a H_c$ adică patrulaterul $H_c H_a M_a H_b$ este inscriptibil, atunci

$m(\hat{H}_c M_a H_b) = m(\hat{H}_c H_a H_b)$. Dar $m(\hat{H}_b H_a H_c) = 180^\circ - 2m(\hat{A}) = m(\hat{A}) = 60^\circ$, deci

$m(\hat{H}_c M_a H_b) = 60^\circ$.

¹⁹² Evariste Galois (1811 – 1832) – matematician francez, contribuții remarcabile în algebră

2) **Triunghiurile $M_aH_bH_c$, AM_bH_c și AH_bM_c sunt echilaterale.**

Demonstrație. Deoarece $m(\widehat{H_cM_aH_b}) = 60^\circ$, iar $H_cM_a \equiv H_bM_a \left(= \frac{BC}{2} \right)$ rezultă că triunghiul $M_aH_bH_c$ este echilateral. Analog pentru celelalte două triunghiuri.

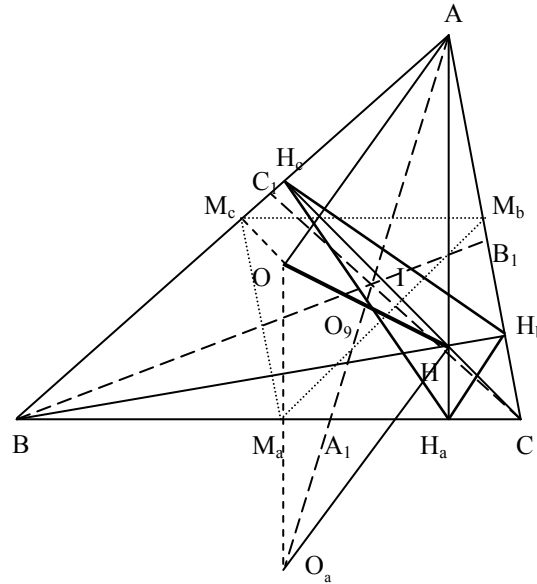


Fig. 423

3) **Proiecția unei laturi care formează unghiul de 60° pe cealaltă este egală cu jumătate din latura proiectată.**

Demonstrație. Triunghiurile AM_bH_c , AH_bM_c fiind echilaterale, rezultă

$$AH_c = AM_b = \frac{AC}{2}, \quad AH_b = AM_c = \frac{AB}{2}.$$

4) **Lungimea segmentului AH (H este ortocentrul $\Delta_{60^\circ}ABC$) este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC .**

Demonstrație: Avem $AH = 2R \cos A = 2R \cos 60^\circ = R$.

5) **Patrulaterul B_1IC_1A este inscriptibil (I este centrul cercului înscris în $\Delta_{60^\circ}ABC$).**

Demonstrație. Avem $m(\angle B_1IC_1) = \frac{1}{2}m(\angle ABC + \angle ACB) = m(\angle A)$.

6) **Lungimea segmentului AI este egală cu diametrul cercului înscris triunghiului ABC .**

Demonstrație. Din $r = AI \sin \frac{A}{2} = AI \sin 30^\circ$ rezultă $AI = 2r$.

7) Punctele B, C, O, H, I, I_a aparțin unui cerc simetric cercului circumscris triunghiului $\Delta_{60^\circ}ABC$ în raport cu latura BC (unde I_a este centrul cercului A – exînscriș).

Demonstrație. Centrul cercului circumscris triunghiului BIC - punctul O_a - se află pe mijlocul arcului $\widehat{BC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC și trece prin punctul I_a . Raza acestui cerc este egală cu R - raza cercului circumscris triunghiului $\Delta_{60^\circ}ABC$ - (triunghiul O_aBC fiind echilateral). Avem: $O_aB = O_aC = O_aO = O_aI = O_aI_a = R$, deci O este punct pe cercul cu centrul în O_a și raza R . Deoarece $m(\angle BOC) = 2m(\angle A) = 120^\circ$ și $m(\angle BHC) = m(\angle H_bHH_c) = 180^\circ - m(\angle A) = 120^\circ$ rezultă că $\widehat{BOC} \equiv \widehat{BHC}$, deci patrulaterul $BHOC$ este inscriptibil, deci și punctul H aparține cercului pe care se află punctele B, C, O, I și I_a .

8) Punctele A, H_b, H_c, H, O_9 (O_9 este centrul cercului lui Euler al triunghiului $\Delta_{60^\circ}ABC$) aparțin unui cerc de rază $R/2$.

Demonstrație. Punctele A, H_b, H_c, H aparțin cercului cu centrul în punctul M_1 - mijlocul segmentului AH - și de rază. Deoarece $M_1O_9 = \frac{R}{2}$ (linie mijlocie în triunghiul OAH) rezultă că O_9 aparține și el cercului de mai sus.

9) Patrulaterul AHO_aO este romb.

Demonstrație. Avem: $AH = HO_a = O_aO = OA = R$. Diagonalele rombului sunt bisectoarea unghiului A și dreapta lui Euler a $\Delta_{60^\circ}ABC$ (O_a fiind mijlocul arcului $\widehat{BC}$ al cercului circumscris $\square ABC$).

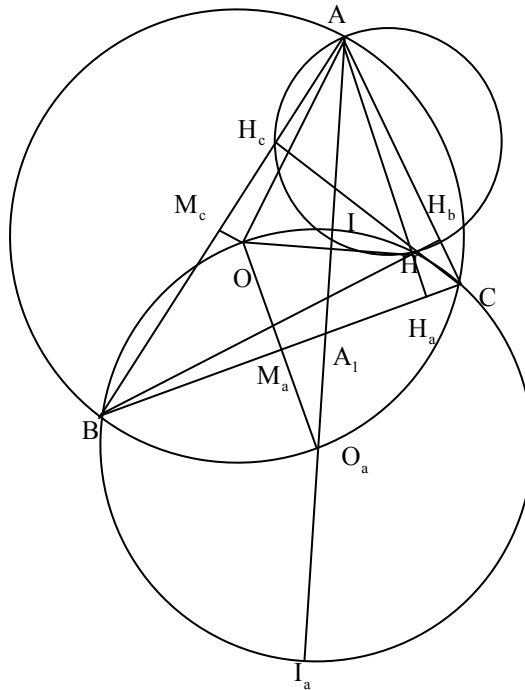


Fig. 424

10) Centrul cercului lui Euler al triunghiului $\Delta_{60^\circ} ABC$ este mijlocul segmentului AO_a .
Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

11) Bisectoarea exterioară a unghiului A și dreapta lui Euler a triunghiului $\Delta_{60^\circ} ABC$ sunt perpendiculare.
Demonstrația rezultă din proprietățile precedente.

12) Triunghiul OI_aH este isoscel.

Demonstrație. Deoarece $AI_a \perp OH$, punctele I, O_a, I_a sunt coliniare rezultă $I_aO \equiv I_aH$.

13) Triunghiul OIH este isoscel.

Demonstrație. Deoarece I este mijlocul arcului $\widehat{OH}$ în cercul circumscris rezultă $OI=IH$.

14) În triunghiul $\Delta_{60^\circ} ABC$ sunt adevărate relațiile:

i) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$; ii) $p = (R+r)\sqrt{3}$; iii) $bc = 4r(R+r)$; iv) $h_a = 2r\left(1 + \frac{r}{R}\right)$, unde

$h_a = AH_a$; v) $A_{[ABC]} = 4A_{[AH_bH_c]}$.

Demonstrație.

i) Din teorema cosinusului în triunghiul $\Delta_{60^\circ} ABC$ rezultă
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc$

ii) Deoarece $OI = IH$ rezultă $R(R-2r) = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$, de unde $p = (R+r)\sqrt{3}$.

iii) Avem: $A_{[ABC]} = \frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{bc\sqrt{3}}{4} = pr = r(R+r)\sqrt{3}$, de unde $bc = 4r(R+r)$.

iv) Din $h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2a} = \frac{bc\sqrt{3}}{4R \sin A} = \frac{bc}{2R} = \frac{4r(R+r)}{2R}$ rezultă $h_a = 2r\left(1 + \frac{r}{R}\right)$.

v) Din $AH_c = b \cos A = \frac{b}{2}$, $AH_b = c \cos A = \frac{c}{2}$ rezultă $A_{[AH_bH_c]} = \frac{AH_b \cdot AH_c \cdot \sin A}{2} = \frac{bc\sqrt{3}}{16}$,

deci $A_{[ABC]} = 4A_{[AH_bH_c]}$.

14) Într-un triunghi Δ_{60° triunghiul ortic, triunghiul de contact, triunghiul tangențial și triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ sunt triunghiuri Δ_{60° .

Demonstrație. Deoarece $m(\widehat{H_bH_aH_c}) = 180^\circ - 2m(\widehat{A}) = m(\widehat{A}) = 60^\circ$ rezultă că triunghiul ortic este un triunghi Δ_{60° . Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Avem

$m(\widehat{C_cC_aC_b}) = m(\widehat{C_cC_aI}) + m(\widehat{C_bC_aI}) = m(\widehat{C_cBI}) + m(\widehat{C_bCI}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})] = 60^\circ$

deci triunghiul $C_aC_bC_c$ este un triunghi Δ_{60° . Deoarece triunghiurile ortic $(H_aH_bH_c)$ și tangențial $(T_AT_BT_C)$ ale unui triunghi sunt omotetice, rezultă că

$m(\widehat{T_BT_AT_C}) = 180^\circ - 2m(\widehat{A}) = m(\widehat{A}) = 60^\circ$, deci $T_AT_BT_C$ este un triunghi Δ_{60° . În triunghiul

antisuplementar $I_a I_b I_c$ avem: $m(\angle I_b I_a I_c) = 180^\circ - [m(\angle I_a B C) + m(\angle I_a C B)] = 180^\circ - \left[\left(90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle B) \right) + \left(90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle C) \right) \right] = 60^\circ$ deci $I_a I_b I_c$ este triunghi Δ_{60° .

Observație: Triunghiul Δ_{60° se mai numește **triunghi semiregulat în unghiuri**.

15) Fie triunghiul Δ_{60° , H ortocentrul său. Mediatoarele segmentelor BH , CH intersectează dreptele AB , respectiv, AC în punctele M și N . Punctele M , H și N sunt coliniare.

Demonstrație. Fie M_1 și N_1 mijloacele segmentelor BH , respectiv CH . Deoarece: $m(\angle B H H_c) = 60^\circ$, iar triunghiul $M B H$ fiind isoscel rezultă $m(\angle M B H) = m(\angle M H B) = 30^\circ$, de unde $m(\angle M H H_c) = 30^\circ$, adică punctul M aparține bisectoarei unghiului $\angle H_c H B$. Analog se arată că punctul N aparține bisectoarei unghiului $\angle H_c H C$, de unde rezultă concluzia.

III.20. Triunghiul medianelor

„Geometria este arta de a judeca pe desene rău efectuate.” - Niels H. Abel¹⁹³

1) Să se arate că se poate construi un triunghi având laturile de lungimi egale cu lungimile medianelor unui triunghi ABC .

Demonstrație. Fie AM_a , BM_b , CM_c medianele triunghiului ABC și G centrul său de greutate. Prin punctele C și M_c ducem paralele la medianele BM_b , respectiv AM_a și fie C' punctul de intersecție dintre aceste paralele, iar $\{D\} = AM_a \cap CC'$, $\{E\} = M_c C' \cap BC$ (Fig. 425). Evident $GM_a \equiv M_a D$, și deoarece $M_c C' \parallel GD$, avem $\frac{GC}{M_c C} = \frac{GD}{M_c C'} = \frac{2}{3}$, de unde

$$\text{rezultă } M_c C' = \frac{3}{2} GD = \frac{3}{2} AG = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot AM_a = AM_a \quad (1).$$

Deoarece M_a este mijlocul segmentului GD și $M_c C' \parallel GD$, rezultă că CE este mediană în triunghiul

$M_c C C'$. Din $\frac{M_c G}{GC} = \frac{EM_a}{M_a C} = \frac{1}{2}$ rezultă că M_a este centrul de greutate al triunghiului

$M_c C C'$. Din congruența triunghiurilor BGM_a și CDM_a rezultă că $BG \equiv CG$, de unde

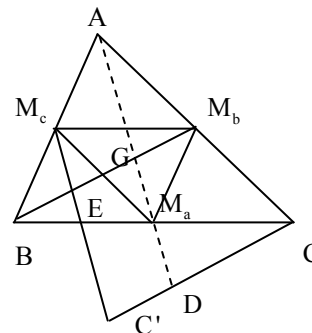


Fig. 425

¹⁹³ Niels H. Abel (1802-1829) – matematician norvegian, contribuții fundamentale în algebră

$\frac{2}{3}MM_b = \frac{2}{3}CC'$, adică $MM_b \equiv CC'$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că triunghiul M_cCC' are laturile de lungimi egale cu cele ale medianelor triunghiului ABC .

Observație: Triunghiul având laturile de lungimi egale cu lungimile medianelor unui triunghi ABC se numește **triunghiul medianelor** corespunzător triunghiului ABC .

2) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC , atunci medianele triunghiului medianelor corespunzător triunghiului ABC au lungimi egale cu $: 3a/4, 3b/4$, respectiv $3c/4$.

Demonstrație. Din aplicația precedentă rezultă $CE = \frac{3}{2}CM_a = \frac{3}{4}BC$,

$M_cM'_c = \frac{3}{2}M_aM_c = \frac{3}{4}AC$ și $C'C'' = \frac{3}{4}AB$, (unde M'_c și C'' sunt mijloacele laturilor CC' , respectiv M_cC).

3) Unghiurile triunghiului medianelor au măsurile egale cu suplementele coordonatelor unghiulare ale centrului de greutate al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $CC' \square BM_b$ și $C'M_c \square AM_a$ rezultă că $m(\angle M_cC'D) = m(\angle M_aGB) = 180^\circ - m(\angle AGB)$ și $m(\angle C'M_cC) = m(\angle M_aGC) = 180^\circ - m(\angle AGC)$; $m(\angle M_cCC') = 180^\circ - m(\angle BGC)$.

III.21. Triunghiuri omologice

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc **omologice** dacă dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente. Punctul O de concurență al dreptelor AA' , BB' și CC' se numește **centrul de omologie** al triunghiurilor ABC și $A'B'C'$; vârfurile A și A' , B și B' , C și C' se numesc **omoloage**, iar dreptele BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ se numesc **omoloage**. Fie $\{L\} = BC \cap B'C'$, $\{M\} = AC \cap A'C'$ și $\{N\} = AB \cap A'B'$. Triunghiurile date sunt **triomologice** dacă admit trei centre de omologie.

1) **Punctele de intersecție ale dreptelor omologe, a două triunghiuri omologe coplanare, sunt coliniare.**

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Desargues”.

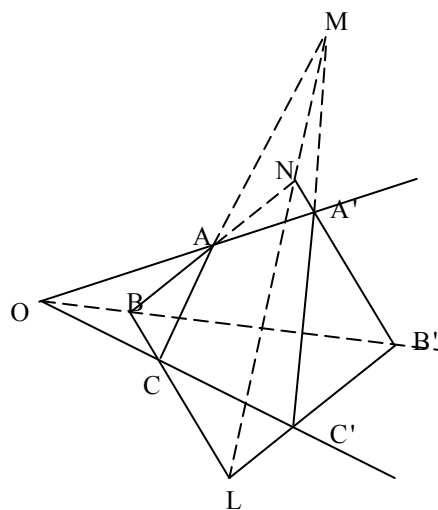


Fig. 426

Dreapta ce conține punctele L, M, N se numește **axă de omologie**. Dacă triunghiul $A'B'C'$ este înscris în triunghiul ABC , atunci dreapta LMN se numește **polară trilineară**, iar O se numește **pol trilinear**.

Observație: Dreapta ce unește picioarele bisectoarelor exterioare este polara trilineară a centrului cercului înscris.

Teorema lui Casey

2) Fie triunghiurile $ABC, A'B'C', A''B''C''$ două câte două omologice, O centrul comun de omologie $\{M\} = AB \cap A'B', \{M'\} = AC \cap A'C', \{N\} = AB \cap A''B'', \{N'\} = AC \cap A''C'', \{P\} = A'B' \cap A''B'', \{P'\} = A'C' \cap A''C''$. Dreptele MM', NN' și PP' sunt concurente.

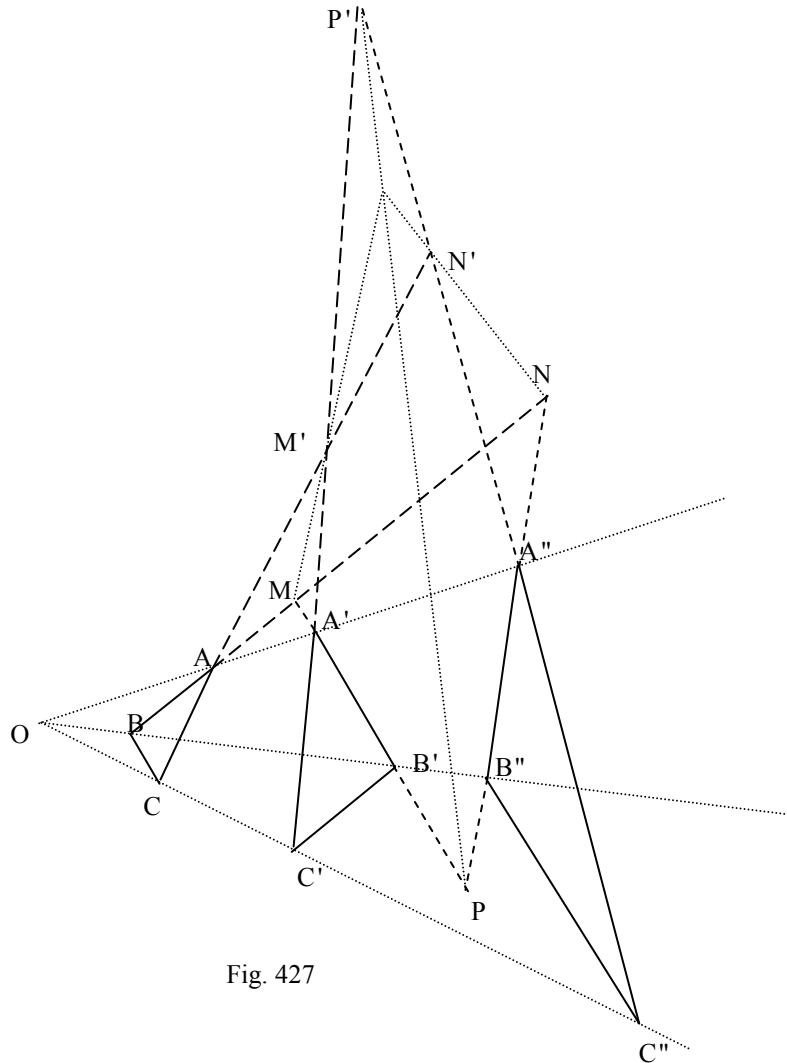


Fig. 427

Demonstrație. Arătăm că triunghiurile MNR și $M'N'P'$ sunt omologice cu ajutorul reciprocei teoremei lui Desargues. Astfel, deoarece $MN \cap M'N' = \{A\}$, $PM \cap P'M' = \{A'\}$, și $NP \cap N'P' = \{A''\}$, iar punctele A, A', A'' sunt coliniare, rezultă că dreptele MM', NN' și PP' sunt concurente.

3) Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu proprietatea că există punctele L, M, N astfel încât $\{L\} = BC \cap B'C'$, $\{M\} = AC \cap A'C'$ și $\{N\} = AB \cap A'B'$, iar dreptele AA' și BB' nu sunt paralele. Dacă punctele L, M și N sunt coliniare, atunci dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Desargues”.

III.22. Triunghiuri ortopolare

„Moisil a fost mai mult decât un savant, a fost mai mulți savanți întruniți în sesiune permanentă sau luându-și locul unul altuia în cicluri succesive mari, reprezentate de temele fundamentale pe care le-a abordat. A fost până în ultimele zile deschizător de drumuri, inovator. În această aventură spirituală nu a admis dilatatismul superficial.”
– Mircea Malița

Teorema lui Lalescu¹⁹⁴

1) Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri înscrise în același cerc. Dacă dreapta Simson a vârfului A' în raport cu ABC este perpendiculară pe dreapta $B'C'$ atunci : i) această proprietate este valabilă pentru toate vârfurile triunghiului $A'B'C'$; ii) Dreptele Simson ale vârfurilor triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A'B'C'$ sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ABC .

Demonstrație. i) Fie N proiecția lui A' pe BC și A'' al doilea punct de intersecție dintre $A'N$ cu cercul circumscris triunghiului ABC . Cum dreapta lui Simson ($s_{A'}$) a punctului A' în raport cu triunghiul ABC este paralelă cu AA'' , atunci pentru ca $s_{A'} \perp B'C'$ trebuie ca $B'C' \perp AA''$ și fie $\{E\} = B'C' \cap AA''$, $\{D\} = B'C' \cap BC$.

Patrulaterul $A''EDN$ este inscriptibil și atunci $\square AA''A' \equiv \square B'DB$, deci

$$m(\square AA') = m(\square B'B) + m(\square CC'). \quad \text{Egalitatea}$$

precedentă este echivalentă cu:

$$m(\square AA') + m(\square B'B) + m(\square CC') = 0 \pmod{360^\circ}$$

(1) (unde am evaluat măsurile arcelor în sens trigonometric). Proprietatea i) este verificată pentru toate vârfurile triunghiului $A'B'C'$ deoarece permutarea ciclică a cuplurilor $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ nu modifică relația (1). ii) Relația (1) nu se modifică dacă se inversează tripletele (A, B, C) și (A', B', C') , atunci

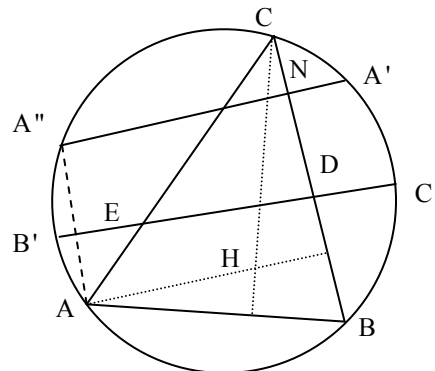


Fig. 428

¹⁹⁴ Traian Lalescu (1882-1929) – matematician român, contribuții importante în geometrie

dreptele lui Simson ale triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A'B'C'$ sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ABC .

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu proprietatea de mai sus se numesc **triunghiuri S^{195}** (sau **ortopolare**) unul în raport cu altul.

2) Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt triunghiuri S dacă și numai dacă $m(\angle AA') + m(\angle BB') + m(\angle CC') = 0 \pmod{360^\circ}$.

Demonstrație: rezultă din teorema lui Lalescu.

3) Dacă ABC și $A'B'C'$ sunt două triunghiuri S , atunci dreptele lui Simson ale vârfurilor triunghiului $A'B'C'$ în raport cu triunghiul ABC și ale vârfurilor triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A'B'C'$ trec prin același punct care se află la mijlocul segmentului ce unește ortocentrele celor două triunghiuri.

Demonstrație. Fie H și H' ortocentrele triunghiurilor ABC , respectiv $A'B'C'$; M , N și P mijloacele segmentelor HA' , HB' , respectiv HC' . Triunghiurile MNP și $A'B'C'$ au laturile paralele. Deoarece dreptele lui Simson ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul ABC sunt perpendiculare pe $B'C', A'C'$ respectiv $A'B'$ și ele trec prin punctele M, N , respectiv P (vezi „Dreapta lui Simson”). Dreptele lui Simson ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul ABC sunt înălțimile triunghiului MNP , deci concurente în ortocentrul acestuia, punct care este mijlocul segmentului HH' . Schimbând rolurile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ rezultă că dreptele Simson ale vârfurilor triunghiului $A'B'C'$ în raport cu triunghiul ABC sunt concurente tot în mijlocul segmentului HH' .

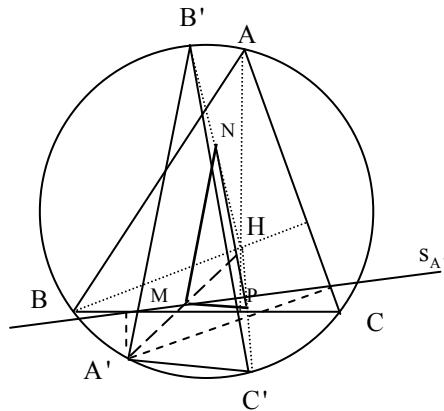


Fig. 429

4) Consecință: Dacă H și H' sunt ortocentrele triunghiurilor S , ABC și $A'B'C'$, atunci triunghiul omotetic triunghiului ABC prin omotetia $\mathcal{H}(H', 1/2)$ și triunghiul omotetic triunghiului $A'B'C'$ prin omotetia $\mathcal{H}(H, 1/2)$ au același ortocentru în punctul comun al dreptelor lui Simson.

5) Fie $(ABC, \alpha\beta\gamma)$ și $(ABC, \alpha'\beta'\gamma')$ două perechi de triunghiuri S înscrise în același cerc. Triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ și $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt triunghiuri S unul față de celălalt.

Demonstrație: Deoarece triunghiurile ABC și $\alpha\beta\gamma$ sunt triunghiuri S rezultă : $m(\angle A\alpha) + m(\angle B\beta) + m(\angle C\gamma) = 0 \pmod{360^\circ}$ (1), iar din faptul că triunghiurile ABC și $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt triunghiuri S rezultă $m(\angle A\alpha') + m(\angle B\beta') + m(\angle C\gamma') = 0 \pmod{360^\circ}$ (2). Din (1) și

² Denumirea a fost dată de Traian Lalescu

(2) rezultă $m(\overline{\alpha\alpha'}) + m(\overline{\beta\beta'}) + m(\overline{\gamma\gamma'}) = 0 \pmod{360^\circ}$, adică triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ și $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt triunghiuri S .

6) Consecință : În cercul circumscris unui triunghi ABC se pot înscrie o infinitate de triunghiuri S în raport cu triunghiul ABC .

Observație: Toate aceste triunghiuri înscrise în cercul circumscris triunghiului ABC , împreună cu triunghiul ABC determină o *familie de triunghiuri S* .

7) Dreapta lui Simson a unui punct M în raport cu triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ înscrise în același cerc cu triunghiul ABC , față de care sunt triunghiuri S , păstrează o direcție fixă.

Demonstrație. Considerăm o coardă NP în cercul circumscris triunghiului ABC , astfel încât triunghiul MNP este un triunghi S față de familia de triunghiuri considerată. Atunci, dreptele lui Simson ale punctului M în raport cu triunghiurile considerate sunt perpendiculare pe dreapta NP .

Observație. Proprietatea precedentă poate fi reformulată astfel: dreptele lui Simson ale unui punct M în raport cu triunghiurile S sunt paralele între ele.

8) Două triunghiuri înscrise în același cerc care au un vârf comun și laturile opuse paralele, sunt triunghiuri S .

Demonstrație. Fie A vârful comun triunghiurilor ABC și $AB'C'$. Deoarece $B'C' \parallel BC$ rezultă $m(\overline{B'B}) = m(\overline{C'C})$, atunci $m(\overline{B'B}) + m(\overline{C'C}) = 0$ unde arcele $\overline{B'B}$ și $\overline{C'C}$ au fost măsurate în sens trigonometric. Conform relației (1) rezultă că triunghiurile ABC și $AB'C'$ sunt triunghiuri S .

9) Consecință: Dacă unuia dintre triunghiurile unei familii S deplasăm o latură paralelă cu ea însăși, triunghiurile rămân, de asemenea, triunghiuri S .

Observație: Din cele de mai sus se pot deduce diferite procedee de construcție a unui triunghi S în raport cu un triunghi dat, când i se cunosc două vârfuri. Astfel, fie triunghiul ABC și punctele B' și C' pe cercul circumscris triunghiului ABC .

i) Construim dreapta lui Simson $d_{B'}$ a punctului B' în raport cu triunghiul ABC . Punctul de intersecție dintre perpendiculara dusă din C' pe $d_{B'}$ și cercul circumscris triunghiului ABC este cel de-al treilea vârf al triunghiului cerut (Fig. 430).

ii) Prin vârful A al triunghiului ABC construim o paralelă la dreapta $B'C'$ care intersectează din nou cercul în A^* . Punctul de intersecție dintre paralela dusă din A^* la BC cu cercul circumscris triunghiului ABC este vârful A' al triunghiului căutat (Fig. 431).

iii) Prin vârful A al triunghiului ABC construim perpendiculara pe coarda $B'C'$ care intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în A^* . Perpendiculara din A^* pe BC intersectează cercul în A' -punctul căutat (Fig. 432).

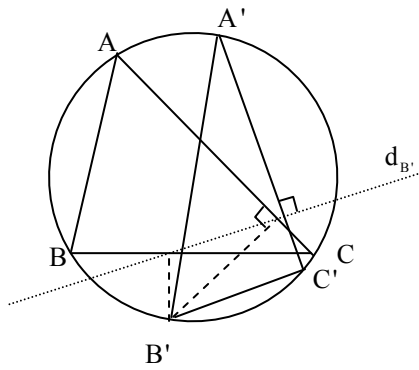


Fig. 430

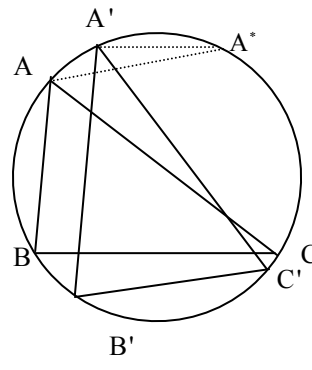


Fig. 431

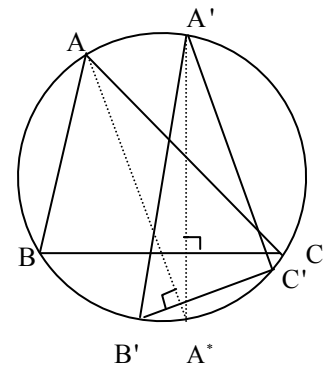


Fig. 432

10) Triunghiurile ortic $H_aH_bH_c$ și median $M_aM_bM_c$ ale unui triunghi sunt triunghiuri S în cercul lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Perpendiculara din punctul M_a pe latura H_bH_c a triunghiului ortic intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului ABC în punctul eulerian A' (mijlocul segmentului AH) (Fig. 433). Întrucât perpendiculara din A' pe latura M_bM_c a triunghiului median cade în punctul H_a rezultă - conform observațiilor precedente - că triunghiurile median și ortic ale triunghiului ABC sunt triunghiuri S în cercul lui Euler al triunghiului ABC .

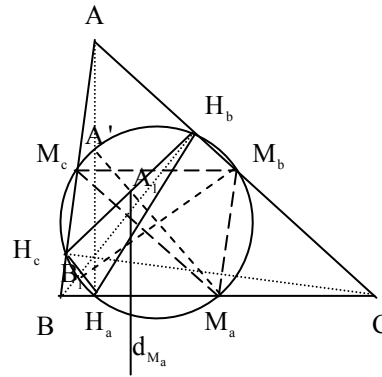


Fig. 433

11) Mijlocul segmentului ce unește ortocentrele triunghiurilor median și ortic ale unui triunghi ABC este punctul lui Spieker al triunghiului ortic.

Demonstrație. Deoarece triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $M_aM_bM_c$ sunt triunghiuri S vom arăta că punctul lui Spieker al triunghiului ortic este punctul de întâlnire al dreptelor lui Simson ale vârfurilor triunghiului $M_aM_bM_c$ în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ (Fig.433). Segmentul $A'M_a$ este diametru în cercul lui Euler, $A'M_a \perp H_bH_c$ și fie $\{A_1\} = H_bH_c \cap A'M_a$, A_1 fiind mijlocul segmentului H_bH_c (vezi “Cercul lui Euler”), deci dreapta lui Simson d_{M_a} a punctului M_a în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ trece prin A_1 . Deoarece $H_aH_bH_c$ și $M_aM_bM_c$ sunt triunghiuri S , rezultă că $d_{M_a} \perp M_bM_c$, deci $d_{M_a} \perp AH_a$. Fie B_1 și C_1 mijloacele segmentelor H_aH_c , respectiv H_aH_b . Cum $A'H_a$ este bisectoarea unghiului $\angle H_cH_aH_b$ și $B_1A_1 \perp H_aH_b$, $A_1C_1 \perp H_aH_c$ rezultă că d_{M_a} este bisectoarea unghiului

$\square B_1A_1C_1$. Analog se arată că dreapta lui Simson d_{M_b} a punctului M_b este bisectoarea unghiului $\square A_1B_1C_1$, deci punctul de concurență al dreptelor lui Simson - mijlocul segmentului ce unește ortocentrele triunghiurilor S , $H_aH_bH_c$ și $M_aM_bM_c$ - este punctul lui Spieker al triunghiului ortic $H_aH_bH_c$.

12) Triunghiul $A'B'C'$, determinat de punctele euleriene ale triunghiului ABC și triunghiul $A''B''C''$, având ca vârfuri punctele unde mediatoarele triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului ABC , sunt două triunghiuri S .

Demonstrație. Dacă $O_aO_bO_c$ este triunghiul lui Carnot al triunghiului ABC , atunci triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul median al triunghiului $O_aO_bO_c$, iar triunghiul $A''B''C''$ este triunghiul ortic al aceluiași triunghi (vezi „Triunghiul Carnot”) și conform proprietăților precedente, rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt triunghiuri S .

13) Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortopolare dacă și numai dacă $abc = a'b'c'$ (unde cu x am notat afixul punctului X).

Demonstrație. Fie P, Q, R picioarele perpendicularelor duse din punctul A' pe dreptele BC, CA , respectiv AB .

Lemă. Fie X un punct în interiorul unui triunghi ABC și P proiecția lui X pe BC . Afixul

punctului P este egal cu $p = \frac{1}{2} \left(x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right)$, unde cu a, b, c, x am notat afixele

punctelor A, B, C , respectiv X , iar R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Ecuațiile dreptelor BC și XP sunt: $(z-b)(\bar{c}-\bar{b}) - (\bar{z}-\bar{b})(c-b) = 0$, respectiv $(z-x)(\bar{c}-\bar{b}) + (\bar{z}-\bar{x})(c-b) = 0$. Deoarece punctul P aparține dreptelor BC și XP rezultă

$$(2p-b-x)(\bar{c}-\bar{b}) + (\bar{b}-\bar{x})(c-b) = 0, \quad \text{de unde}$$

$$p = \frac{1}{2} \left[b+x + \frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}} (\bar{x}-\bar{b}) \right] = \frac{1}{2} \left[b+x + \frac{c-b}{\frac{\bar{c}}{c} - \frac{\bar{b}}{b}} (\bar{x}-\bar{b}) \right] \text{ sau } p = \frac{1}{2} \left[b+x - \frac{bc}{R^2} (\bar{x}-\bar{b}) \right] = \frac{1}{2} \left(x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right).$$

Demonstrația teoremei. Avem: $p = \frac{1}{2} \left(a' - \frac{bc}{R^2} \bar{a}' + b + c \right), q = \frac{1}{2} \left(a' - \frac{ca}{R^2} \bar{a}' + c + a \right),$

$r = \frac{1}{2} \left(a' - \frac{ab}{R^2} \bar{a}' + a + b \right)$. Dacă A' nu coincide cu un vârf al triunghiului ABC , atunci

condiția de perpendicularitate dintre PQ și $B'C'$ este echivalentă cu $(\bar{p}-\bar{q})(b'-c') + (p-q)(\bar{b}'-\bar{c}') = 0$ sau $(\bar{b}-\bar{a})(R^2 - \bar{c}a')(b'-c') + (b-a)(R^2 - c \cdot \bar{a}')(\bar{b}'-\bar{c}') = 0$

sau mai departe $\left(\frac{R^2}{b} - \frac{R^2}{a} \right) \left(R^2 - \frac{R^2}{c} a' \right) (b'-c') + (b-a) \left(R^2 - c \frac{R^2}{a'} \right) \left(\frac{R^2}{b'} - \frac{R^2}{c'} \right) = 0$, de

unde rezultă că $(abc - a'b'c')(a-b)(c-a')(b'-c') = 0$, deci $abc = a'b'c'$. Dacă A' coincide - de exemplu - cu vârful A , atunci dreapta lui Simson a lui A' este perpendiculara din A pe BC . Dreptele $A'P$ și $B'C'$ sunt perpendiculare dacă și numai dacă $BC \square B'C'$, adică $bc = b'c'$ sau $abc = a'b'c'$ (deoarece $a = a'$).

III.23. Triunghiuri ortologice

„Orice număr este zero înaintea infinitului.” – Victor Hugo¹⁹⁶

Triunghiul ABC este **ortologic** cu triunghiul $A'B'C'$ dacă perpendicularele din A, B, C pe $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$ sunt concurente. Punctul de concurență se numește **centrul** acestei ortologii.

1) Dacă triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul $A'B'C'$, atunci și triunghiul $A'B'C'$ este ortologic cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Soluția 1. Fie D, E, F proiecțiile punctelor $A, B,$ și C pe laturile $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$ (Fig. 434). Avem: $B'A^2 - B'D^2 = C'A^2 - DC'^2 = DA^2$, $C'B^2 - C'E^2 = A'B^2 - A'E^2 = BE^2$, $A'C^2 - A'F^2 = B'C^2 - B'F^2 = CF^2$. Din relațiile precedente prin sumare obținem: $(B'A^2 + C'B^2 + A'C^2) - (B'D^2 + C'E^2 + A'F^2) = (A'B^2 + B'C^2 + C'A^2) - (A'E^2 + B'F^2 + C'D^2)$ (*)

Din teorema lui Carnot rezultă că $B'D^2 + C'E^2 + A'F^2 = A'E^2 + B'F^2 + C'D^2$.

Relația (*) devine: $B'A^2 + C'B^2 + A'C^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'A^2$ (**). Condiția ca triunghiul ABC să fie ortologic cu triunghiul $A'B'C'$ este dat de relația (**). Pentru ca triunghiul $A'B'C'$ să fie ortologic cu triunghiul ABC este suficient să permutăm în relația (**) rolurile triunghiului ABC cu cel al lui $A'B'C'$, prin această permutare se obține tot relația (**), ceea ce arată că și triunghiul $A'B'C'$ este ortologic cu triunghiul ABC .

Soluția 2. Notăm cu P punctul de concurență al perpendiculelor din A, B, C pe laturile triunghiului $A'B'C'$ și cu P' punctul de intersecție al perpendiculelor din A' și B' pe BC , respectiv AC . Avem: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{P'C'} - \overrightarrow{P'B'}$, $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{P'A'} - \overrightarrow{P'C'}$, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{P'B'} - \overrightarrow{P'A'}$.

Folosind aceste relații obținem $0 = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{P'C'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{P'B'} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{P'A'} \cdot \overrightarrow{BC}$. Cum $P'B' \perp AC$ și $P'A' \perp BC$, avem $\overrightarrow{P'B'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{P'A'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, deci $\overrightarrow{P'C'} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, de unde rezultă $P'C' \perp AB$. Prin urmare perpendicularele din A', B', C' pe laturile triunghiului ABC sunt concurente în P' .

Două triunghiuri care satisfac proprietățile de mai sus se numesc **ortologice**. Fie P și P' cele **două centre de ortologie** ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. Dacă centrele de ortologie P și P' coincid, atunci triunghiurile se numesc **bilogice**.

2) Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice dacă și numai dacă este adevărată

relația: $B'A^2 + C'B^2 + A'C^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'A^2$.

Demonstrația rezultă de mai sus.

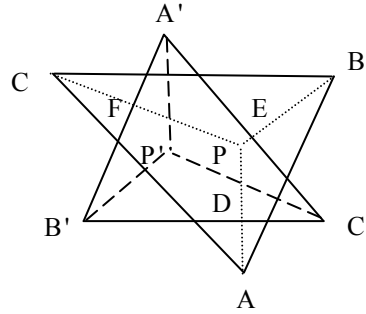


Fig. 434

¹⁹⁶ Victor Hugo (1802-1885) – scriitor francez

3) Triunghiul ABC și triunghiul podar al unui punct P sunt ortologice, centrele de ortologie fiind P și izogonalul său P' .

Demonstrație.

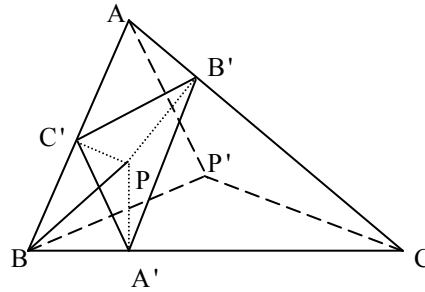


Fig. 435

Triunghiul $A'B'C'$ este ortologic cu triunghiul ABC , centrul acestei ortologii fiind P . (Fig. 435). Conform teoremei de ortologie și triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul $A'B'C'$, centrul acestei ortologii fie că este punctul P' . Patrulaterul $BA'PC'$ fiind inscriptibil rezultă: $m(\angle ABP') = 90^\circ - m(\angle A'C'B) = 90^\circ - m(\angle BPA') = m(\angle PBA') = m(\angle PBC)$, deci $\angle ABP \equiv \angle P'BC$ adică dreptele BP și BP' sunt izogonale. Analog se arată că dreptele AP și AP' sunt izogonale, deci punctele P și P' sunt izogonale.

4) Triunghiul antipodar al unui punct P este ortologic cu triunghiul cevian al punctului P în raport cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antipodar”.

5) Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ și triunghiul cevian al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC sunt ortologice.

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler”.

6) Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice având centrele de ortologie P și P' , atunci coordonatele baricentrice ale lui P în raport cu triunghiul ABC sunt egale cu coordonatele baricentrice ale lui P' în raport cu triunghiul $A'B'C'$.

Demonstrație. Deoarece $A'P' \perp BC$, $B'P' \perp AC$, $C'P' \perp AB$ rezultă: $\sin \angle P'BC' = \sin \angle A$, $\sin \angle P'AC' = \sin \angle B$ și $\sin \angle P'AB' = \sin \angle C$ (Fig. 435). Din teorema

sinusurilor în triunghiul $P'B'C'$ rezultă $\frac{P'B'}{\sin \angle P'C'B'} = \frac{P'C'}{\sin \angle P'B'C'}$ și $\frac{P'B'}{\sin \angle PAB} = \frac{P'C'}{\sin \angle PAC}$

de unde : $\frac{\sin \angle PAC}{\sin \angle PAB} = \frac{P'C'}{P'B'}$ (1). Atunci, $\frac{A_{[PAC]}}{A_{[PAB]}} = \frac{b \cdot PA \cdot \sin \angle PAC}{c \cdot PA \cdot \sin \angle PAB} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin \angle PAC}{\sin \angle PAB}$ (2). Din

relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{b}{P'B'} : \frac{c}{P'C'} = \frac{A_{[PAC]}}{A_{[PAB]}}$ (3). Analog se arată că $\frac{a}{P'A'} : \frac{b}{P'B'} = \frac{A_{[PBC]}}{A_{[PCA]}}$

(4). Relațiile (3) și (4) dau coordonatele baricentrice ale punctului P' în raport cu

$$\text{triunghiul } ABC : A_{[P'B'C']} : A_{[P'C'A']} : A_{[P'A'B']} = [P'B' \cdot P'C' \cdot \sin A] : [P'C' \cdot P'A' \cdot \sin B] : [P'A' \cdot P'B' \cdot \sin C] = \\ \frac{a}{P'A'} : \frac{b}{P'B'} : \frac{c}{P'C'} = A_{[PBC]} : A_{[PAC]} : A_{[PAB]}.$$

Observație: Proprietatea de mai sus ne arată că dacă P este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci P' este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

7) Triunghiul ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului nedreptunghic ABC și triunghiului ABC sunt ortologice, centrele de ortologie fiind ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Perpendicularele din vârfurile A, B, C ale triunghiului nedreptunghic pe laturile $B'C', C'A'$ respectiv $A'B'$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC (vezi „Triunghiul ortic”).

8) Fie $H_a H_b H_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC , H'_a, H'_b, H'_c punctele diametral opuse punctelor H_a, H_b , respectiv H_c în cercul lui Euler al triunghiului ABC . Triunghiurile ABC și $H'_a H'_b H'_c$ sunt ortologice.

Demonstrație. Deoarece triunghiurile $H_a H_b H_c$ și $H'_a H'_b H'_c$ sunt omotetice, rezultă - conform proprietății precedente - $OA \perp H'_c H'_b, OB \perp H'_a H'_c$ și $OC \perp H'_a H'_b$, adică triunghiurile ABC și $H'_a H'_b H'_c$ sunt ortologice, centrul cercului circumscris triunghiului ABC fiind unul dintre centrele de ortologie.

9) Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ simetrice față de o dreaptă sunt ortologice.

Demonstrație. Deoarece $AB' \equiv BA', BC' \equiv CB'$ și $CA' \equiv AC'$, relația $B'A^2 + C'B^2 + A'C^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'A^2$ este evident adevărată, deci triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice.

10) Fie A', B', C' simetricile vârfurilor A, B, C ale unui triunghi ABC față de dreapta lui Euler a triunghiului ABC . Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice.

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

III.24. Triunghiuri paralogice

„Ușor nu e nici cântecul. Zi
și noapte – nimic nu-i ușor pe pământ
câci roua e sudoarea privighetorilor
ce s-au ostenit toată noaptea cântând.”
Lucian Blaga¹⁹⁷

Fie M, N, P punctele de intersecție dintre dreapta d cu laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC . Punctele de intersecție dintre perpendicularele ridicate în punctele M, N, P pe dreptele BC, CA, AB sunt vârfurile unui triunghi $A'B'C'$ numit **triunghiul paralogic** (**ortoomologic**) al triunghiului ABC .

1) Triunghiul paralogic $A'B'C'$ și triunghiul ABC sunt asemenea.

Demonstrație. Patrulaterul $PMB'P$ este inscriptibil, deci $m(\angle PB'M) = m(\angle ABC)$, adică $\angle A'B'C' \equiv \angle ABC$. Patrulaterul $APA'N$ este inscriptibil, deci $m(\angle A'PN) = m(\angle ACN)$, deci $\angle A'C'B' \equiv \angle ACB$.
(2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt asemenea (Fig. 436).

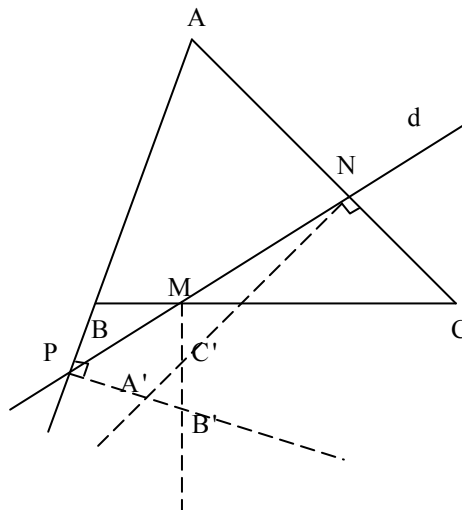


Fig. 436

2) Triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt omologice, dreapta d fiind axa de omologie.

Demonstrație. Deoarece $\{P\} = AB \cap A'B'$, $\{M\} = BC \cap B'C'$, $\{N\} = AC \cap A'C'$ iar punctele M, N, P sunt coliniare, rezultă din teorema lui Desargues că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, deci triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt omologice, dreapta d fiind axa de omologie

3) Centrul de omologie (τ) dintre triunghiul ABC și triunghiul paralogic $A'B'C'$ aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.

Demonstrație. Avem $\{\tau\} = AA' \cap BB' \cap CC'$ (Fig. 437). Patrulaterul $PB'MB$ și $B'MNC$ fiind inscriptibile: $\angle NMC \equiv \angle NCC' \equiv \angle A'C'\tau$ și $\angle PMB \equiv \angle PB'B$, iar cum $\angle PMB \equiv \angle NMC$ (unghiuri opuse la vârf) avem: $\angle \tau C'A' \equiv \angle A'B'\tau$, adică patrulaterul $\tau A'B'C'$ este inscriptibil (1). Atunci

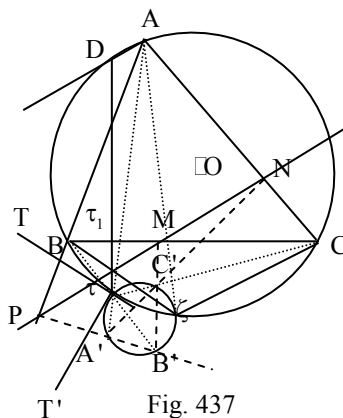


Fig. 437

¹⁹⁷ Lucian Blaga (1895-1961) - filozof, umanist, jurnalist, poet, dramaturg, traducător, profesor universitar și diplomat român, membru titular al Academiei Române

$\square A'\tau B' \equiv \square A'C'B' \equiv \square BCA \equiv \square B\tau A$, deci patrulaterul $B\tau CA$ este inscriptibil (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că τ aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.

4) Cercurile circumscrise triunghiurilor $A'B'C'$, ABC sunt ortogonale.

Demonstrație. Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ cercurile circumscrise triunghiurilor ABC , respectiv $A'B'C'$, iar $T\tau$ și $T'\tau$ tangentele în punctul τ (centrul omologiei) la $\mathcal{C}$ respectiv $\mathcal{C}'$ (Fig. 437). Atunci $m(\square T\tau B) = m(\square B\tau A)$, $m(\square PA'\tau) = m(\square A'B'\tau) + m(\square T'\tau A') + m(\square A'B'\tau) = m(\square T'\tau B')$, de unde rezultă că: $m(\square T'\tau T) = 180^\circ - [m(\square T\tau B) + m(\square T'\tau B')] = 180^\circ - [m(\square PA\tau) + m(\square PA'\tau)] = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, deci cercurile $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sunt ortogonale.

5) Dreptele lui Simson ale punctului τ față de triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt paralele cu dreapta d .

Demonstrație. Fie τ_1 proiecția lui τ pe BC și D punctul de intersecție dintre $\tau\tau_1$ cu cercul circumscris triunghiului ABC . Dreapta lui Simson corespunzătoare punctului τ în raport cu triunghiul ABC este paralelă cu dreapta AB (vezi „Dreapta lui Simson”) arătăm că $AD \parallel d$. Patrulaterul $ADBE$ și $BPB'M$ fiind inscriptibile, rezultă $m(\square DAB) = m(\square \tau B) = 90^\circ - m(\tau B\tau_1) = 90^\circ - m(\square MPB') = m(\square BPM)$, deci $\square DAP \equiv \square APM$, adică $DA \parallel PM$. Atunci, dreapta lui Simson a punctului τ este în raport cu triunghiul ABC este paralelă cu dreapta d . Analog se arată că dreapta lui Simson a punctului τ este în raport cu triunghiul paralogic $A'B'C'$ este paralelă cu dreapta d .

6) Al doilea punct de intersecție dintre cercurile circumscrise triunghiurilor $A'B'C'$, ABC este centrul de similitudine al triunghiurilor $A'B'C'$, ABC .

Demonstrație. Pentru ca punctul ζ să fie centrul de similitudine dintre triunghiurile omologice și asemenea $A'B'C'$, ABC trebuie ca punctul ζ să fie pentru ambele triunghiuri propriul său omolog, adică triunghiurile ζAC și $\zeta A'C'$ trebuie să fie asemenea. Avem: $\square \zeta AC \equiv \square \zeta BC \equiv \square CT\zeta \equiv \square CA'\zeta$ și $\square A\zeta C \equiv \square ABC \equiv \square A'B'C' \equiv \square A'\zeta C'$, deci triunghiurile ζAC și $\zeta A'C'$ sunt asemenea.

Observație: Analog se arată că triunghiurile ζAB și $\zeta A'B'$, respectiv ζBC și $\zeta B'C'$ sunt asemenea.

7) Dacă H și H' sunt ortocentrele triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ atunci axa de omologie trece prin mijlocul segmentului HH' .

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Sondat”.

III.25. Triunghiuri bilogice

„Crucea pusă lângă numele unora mulți o iau drept plus.” - S. E. Lec¹⁹⁸

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc **bilogice** dacă sunt ortologice și au același centru de ortologie.

1) Două triunghiuri bilogice sunt omologice.

Demonstrație. Fie $\{D\} = AO \cap B'C'$, $\{E\} = BO \cap C'A'$, $\{F\} = CO \cap A'B'$ (Fig. 438). Atunci: $AD \perp B'C'$, $BE \perp A'C'$, $CF \perp A'B'$ și $A'O \perp BC$, $B'O \perp CA$, $C'O \perp AB$. Fie $\{B''\} = BE \cap A'B'$, $\{C''\} = CF \cap A'C'$. Deoarece O este ortocentrul triunghiului $A'B''C''$ rezultă $A'O \perp B''C''$; cum $A'O \perp BC$ rezultă $BC \parallel B''C''$. Atunci, $m(\square B''C''F) = m(\square BCF)$ (unghiuri corespondente) și cum $m(\square B''C''F) = m(\square B''EF)$ (deoarece patrulaterul

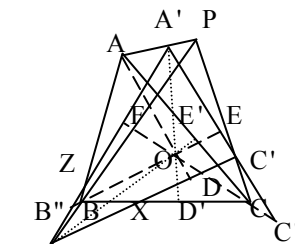


Fig. 438

$B''C''EF$ este inscriptibil) rezultă $m(\square BCF) = m(\square BEF)$, deci patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil. Analog se arată că punctele C, A, F, D respectiv A, B, D și E sunt conciclice. Dacă $\{X\} = BC \cap B'C'$, $\{Y\} = AC \cap C'A'$, $\{Z\} = AB \cap A'B'$ atunci conform teoremei lui Dergiades rezultă că punctele X, Y și Z sunt coliniare; deci, conform reciprocei teoremei lui Desergues triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt omologice.

2) Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri bilogice. Picioarele perpendicularelor duse din vârfurile B și C pe laturile $A'C'$ respectiv $A'B'$ și punctele B și C sunt conciclice.

Demonstrația rezultă din teorema precedentă.

3) Fie XYZ axa de omologie dintre triunghiurile bilogice ABC și $A'B'C'$, iar O centrul comun de ortologie. Dreptele OX și AA' sunt perpendiculare.

Demonstrație. Fie $\{D'\} = A'O \cap BC$, $\{E'\} = B'O \cap AC$.

Conform proprietății precedente punctele A', B', D', E' aparțin unui cerc C_1 . Din puterea punctului O față de cercul C_1 rezultă $OA' \cdot OD' = OB' \cdot OE'$ (1). Patrulaterul $B'CE'F$ fiind inscriptibil ($m(\square BE'C) = m(\square CFB) = 90^\circ$) rezultă $OB' \cdot OE' = OC \cdot OF$ (2). Dacă $\{D\} = AO \cap B'C'$, atunci patrulaterul $AFDC$ este inscriptibil (conform proprietății precedente) de unde rezultă $OC \cdot OF = OA \cdot OD$ (3). Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă $OA \cdot OD = OA' \cdot OD'$, adică punctele A, A', D și D' sunt conciclice, de unde $m(\square AA'D') = m(\square ADD')$ (4). Fie OT tangenta în O la

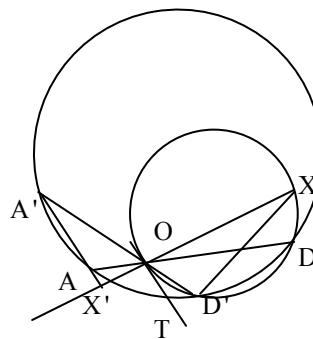


Fig. 439

cercul (C) circumscris patrulaterului $OD'DX$ ($m(\square OD'X) = m(\square ODX) = 90^\circ$) (Fig. 439).

¹⁹⁸ Stanislaw Lec (1909-1966) – poet polonez

Atunci, $m(\square TOD') = m(\square ODD')$ (5). Din relațiile (4) și (5) rezultă $m(\square AA'O) = m(\square TOD')$, deci $AA' \perp OT$. Cum $OX \perp OT$ (ca diametru în cercul C) rezultă $OX \perp AA'$.

Observație: Analog se arată că $OY \perp BB'$ și $OZ \perp CC'$.

4) Fie P centrul de omologie și XYZ axa de omologie dintre triunghiurile bilogice ABC și $A'B'C'$, iar O centrul comun de ortologie. Dreptele OP și XZ sunt perpendiculare.

Demonstrație. Fie $\{D'\} = A'O \cap BC$, $\{E'\} = B'O \cap AC$, $\{X'\} = OX \cap AA'$ și $\{Y'\} = OY \cap BB'$. Conform proprietății precedente $XX' \perp AA'$, deci patrulaterul $A'X'D'X$ este inscriptibil. Din puterea punctului O față de cercul circumscris patrulaterului $A'X'D'X$ rezultă $OX \cdot OX' = OA' \cdot OD'$ (1). Punctele A', B', D', E' fiind conciclice – din puterea punctului O față de acest cerc – rezultă $OA' \cdot OD' = OB' \cdot OE'$ (2). Deoarece $OY \perp BB'$ rezultă $m(\square YY'B) = 90^\circ = m(\square BEY)$, deci punctele B, Y', E', Y sunt conciclice, de unde $OB' \cdot OE' = OY' \cdot OY$ (3). Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă $OX \cdot OX' = OY \cdot OY'$ adică punctele X, X', Y și Y' sunt conciclice. Dacă C' este cercul de diametru OP , atunci OP este perpendiculară pe tangenta OT în O la C' , iar $OT \perp XY$ (analog cu demonstrația din teorema precedentă) de unde $OP \perp XY$.

III.26. Triunghiuri biortologice. Triunghiuri triortologice

„Pitagora a sacrificat pe altarul lui Zeus o sută de boi și acesta numai pentru un singur adevăr geometric. Dar dacă în zilele noastre am proceda în același fel, este puțin probabil că am putea găsi atâtea vite cornute pe întreg globul pământesc.” - M. V. Lomonosov¹⁹⁹

Triunghiul ABC se numește **biortologic** cu triunghiul $A'B'C'$, dacă el este ortologic în același timp cu triunghiul $A'B'C'$ și cu triunghiul $B'C'A'$. Triunghiul ABC se numește **triortologic** cu triunghiul $A'B'C'$, dacă triunghiul ABC este ortologic în același timp cu triunghiurile $A'B'C'$, $B'C'A'$ și $C'A'B'$.

Teorema lui Pantazi

Dacă un triunghi ABC este ortologic în același timp cu triunghiurile $A'B'C'$ și $B'C'A'$, atunci triunghiul ABC este ortologic și cu triunghiul $C'A'B'$.

Demonstrație. Fie $D_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ecuația dreptei BC și $D_2' = a_1'x + b_1'y + c_1' = 0$ ecuația dreptei $B'C'$. Analog, se definesc ecuațiile dreptelor ce conțin vârfurile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. Fie Aa, Bc, Cc perpendicularele duse din A, B, C pe

$B'C', A'C'$, respectiv $A'B'$. Avem: $(Aa) : D_2 - \frac{a_2a_1' + b_2b_1'}{a_3a_1' + b_3b_1'} D_3 = 0$,

$(Bb) : D_3 - \frac{a_3a_2' + b_3b_2'}{a_1a_2' + b_1b_2'} D_1 = 0$, $(Cc) : D_1 - \frac{a_1a_3' + b_1b_3'}{a_2a_3' + b_2b_3'} D_2 = 0$. Condiția ca triunghiurile

ABC și $A'B'C'$ să fie ortologice este:

¹⁹⁹ Mikhailo Lomonosov (1711-1765) – chimist rus

$$\frac{a_2 a_1' + b_2 b_1'}{a_3 a_1' + b_3 b_1'} \cdot \frac{a_3 a_2' + b_3 b_2'}{a_1 a_2' + b_1 b_2'} \cdot \frac{a_1 a_3' + b_1 b_3'}{a_2 a_3' + b_2 b_3'} = 1$$
, egalitate echivalentă cu

$$(a_1 a_2' + b_1 b_2')(a_2 a_3' + b_2 b_3')(a_3 a_1' + b_3 b_1') = (a_1 a_3' + b_1 b_3')(a_2 a_1' + b_2 b_1')(a_3 a_2' + b_3 b_2') \quad (1).$$
 Ținând seama de relația precedentă, pentru ca perpendicularele duse din A', B', C' pe laturile triunghiului ABC să fie concurente, este necesar ca:

$$(a_1' a_2 + b_1' b_2)(a_2' a_3 + b_2' b_3)(a_3' a_1 + b_3' b_1) = (a_1' a_3 + b_1' b_3)(a_2' a_1 + b_2' b_1)(a_3' a_2 + b_3' b_2) \quad (2)$$
 care este chiar relația (1). Deci, *dacă perpendicularele duse din vârfurile triunghiului ABC pe laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt concurente, atunci și perpendicularele duse din vârfurile triunghiului $A'B'C'$ pe laturile triunghiului ABC sunt concurente.* Pentru ca triunghiurile ABC și $B'C'A'$ să fie ortologice, trebuie ca:

$$(a_1 a_3' + b_1 b_3')(a_2 a_1' + b_2 b_1')(a_3 a_2' + b_3 b_2') = (a_1 a_1' + b_1 b_1')(a_2 a_2' + b_2 b_2')(a_3 a_3' + b_3 b_3') \quad (3)$$
 Din relațiile (1) și (3) rezultă:

$$(a_1 a_1' + b_1 b_1')(a_2 a_2' + b_2 b_2')(a_3 a_3' + b_3 b_3') = (a_1 a_2' + b_1 b_2')(a_2 a_3' + b_2 b_3')(a_3 a_1' + b_3 b_1')$$
 relație echivalentă cu faptul că triunghiurile ABC și $C'A'B'$ sunt ortologice. Deci, dacă două triunghiuri sunt biortologice, atunci ele sunt triortologice.

Consecință: Dacă triunghiul ABC este ortologic cu triunghiurile $M_1 M_2 M_3, M_2 M_3 M_4, \dots$, respectiv $M_{n-1} M_n M_1$, atunci triunghiul ABC este ortologic și cu triunghiul $M_n M_1 M_2$.

III.27. Triunghiuri coparalele

„Expresia, conform căreia cel care nu cunoaște sau îi este străină geometria nu are dreptul să între în școala filozofului, deloc nu înseamnă, că este necesar să fii matematician, pentru a deveni înțelept.” - J. W. von Goethe²⁰⁰

Triunghiurile ABC și $A_1 B_1 C_1$ se numesc **coparalele** dacă $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

1) Dacă M este un punct ce aparține laturii BC a triunghiului ABC , iar d este distanța dintre paralelele duse la AM prin B și C , atunci $A_{[ABC]} = \frac{AM \cdot d}{2}$.

Demonstrație. Fie B' și C' proiecțiile punctelor B și C pe dreapta AM . Dacă $M \in (BC)$ - Fig. 440 - atunci

$$A_{[ABC]} = A_{[ABM]} + A_{[AMC]} = \frac{AM \cdot BB'}{2} + \frac{AM \cdot CC'}{2} = \frac{AM \cdot d}{2}.$$

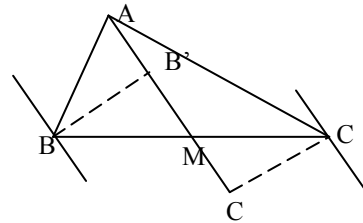


Fig. 440

²⁰⁰J. W. von Goethe (1739-1832) – scriitor german

Dacă $M \in BC \setminus (BC)$ - fig. 441 și fig. 442 – avem:

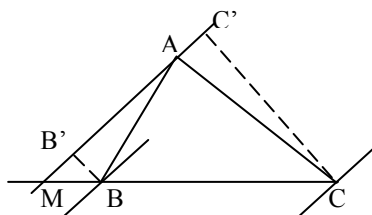


Fig. 441

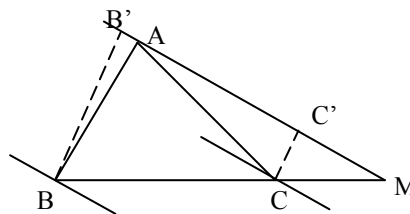


Fig. 442

$$A_{[ABC]} = |A_{[ABM]} - A_{[AMC]}| = \left| \frac{AM \cdot BB'}{2} - \frac{AM \cdot CC'}{2} \right| = \frac{AM \cdot d}{2}.$$

2) Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri coparalele. Dacă înălțimile vârfurilor A și A_1 ale celor două triunghiuri sunt necongruente, atunci există punctele $M \in BC$ și $M_1 \in B_1C_1$

astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{B_1M_1}{B_1C_1}$ și $\frac{AM}{A_{[ABC]}} = \frac{A_1M_1}{A_{[A_1B_1C_1]}}$.

Demonstrație. Evident cazurile $AA_1 \parallel BC$ și $AA_1 \parallel B_1C_1$ nu convin deoarece în fiecare dintre acestea rezultă că înălțimile din A și A_1 ar fi congruente. Fie $\{M\} = AA_1 \cap BC$ și $\{M_1\} = AA_1 \cap B_1C_1$. Astfel, din

$$BB_1 \parallel MM_1 \parallel CC_1 \text{ rezultă } \frac{BM}{BC} = \frac{B_1M_1}{B_1C_1}, \text{ iar din}$$

proprietatea precedentă avem $A_{[ABC]} = \frac{AM \cdot d}{2}$ și

$$A_{[A_1B_1C_1]} = \frac{A_1M_1 \cdot d}{2} \text{ (} d \text{ fiind distanța dintre } BB_1 \text{ și } CC_1 \text{) de}$$

$$\text{unde se obține: } \frac{AM}{A_{[ABC]}} = \frac{A_1M_1}{A_{[A_1B_1C_1]}}.$$

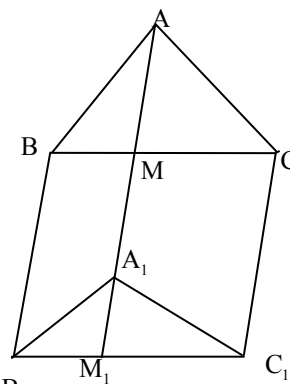


Fig. 443

3) Dacă triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt coparalele, a, b, c respectiv a_1, b_1, c_1 sunt lungimile laturilor lor, atunci

$$(b^2 + c^2 - a^2) \cdot a_1^2 + (c^2 + a^2 - b^2) \cdot b_1^2 + (a^2 + b^2 - c^2) \cdot c_1^2 \geq 8(A_{[ABC]}^2 + A_{[A_1B_1C_1]}^2) \quad (*)$$

Demonstrație. Dacă înălțimile duse din vârfurile A și A_1 au lungimi diferite

$$(h_a \neq h_{a_1}) \text{ atunci utilizând proprietatea precedentă fie } \frac{BM}{BC} = \frac{B_1M_1}{B_1C_1} = x, \text{ deci } BM = x \cdot BC$$

și $B_1M_1 = x \cdot B_1C_1$. Din teorema lui Stewart în triunghiul ABC rezultă :
 $b^2 \cdot BM + c^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC = BM \cdot MC \cdot BC$, relație echivalentă cu
 $AM^2 = x \cdot b^2 + (1-x)c^2 - x(1-x)a^2$. Analog se arată că :

$A_1 M_1^2 = x \cdot b_1^2 + (1-x)c_1^2 - x(1-x)a_1^2$. Atunci din $\frac{AM^2}{A_{[ABC]}^2} = \frac{A_1 M_1^2}{A_{[A_1 B_1 C_1]}^2}$ și relațiile precedente

$$\text{rezultă: } \left(\frac{a^2}{A_{[ABC]}^2} - \frac{a_1^2}{A_{[A_1 B_1 C_1]}^2} \right) \cdot x^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{A_{[ABC]}^2} - \frac{a_1^2 - b_1^2 + c_1^2}{A_{[A_1 B_1 C_1]}^2} \right) \cdot x + \frac{c^2}{A_{[ABC]}^2} - \frac{c_1^2}{A_{[A_1 B_1 C_1]}^2} = 0 \quad (1).$$

Ecuția (1) are rădăcini reale dacă și numai dacă $\Delta \geq 0$, (unde Δ este discriminantul ecuației (1)). Utilizând relațiile $(a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2 c^2 = -16A_{[ABC]}^2$ și $(a_1^2 - b_1^2 + c_1^2)^2 - 4a_1^2 c_1^2 = -16A_{[A_1 B_1 C_1]}^2$, $\Delta \geq 0$ rezultă concluzia. Dacă $h_a = h_{a_1}$, atunci din considerente de simetrie concluzia este adevărată și în cazurile $h_b \neq h_{b_1}$ și $h_c \neq h_{c_1}$. În cazul rămas de studiat - $h_a = h_{a_1}, h_b = h_{b_1}, h_c = h_{c_1}$ - cele două triunghiuri sunt congruente, iar inegalitatea de demonstrat se verifică ca egalitate.

4) Două suprafețe triunghiulare cu aceeași arie sunt coparalele.

Demonstrație. Dacă $A_{[ABC]} = A_{[A_1 B_1 C_1]}$ atunci inegalitatea (*) se transformă în inegalitatea lui Pedoe: $(b^2 + c^2 - a^2) \cdot a_1^2 + (c^2 + a^2 - b^2) \cdot b_1^2 + (a^2 + b^2 - c^2) \cdot c_1^2 \geq 16 \cdot A_{[ABC]} \cdot A_{[A_1 B_1 C_1]}$ (vezi „Teorema lui Pedoe”).

5) Două suprafețe triunghiulare ABC și $A_1 B_1 C_1$ cu $BC = B_1 C_1$ sunt coparalele.

Demonstrație. Utilizând faptul că $a = a_1$ inegalitatea (1) devine: $(b^2 - c^2 - b_1^2 + c_1^2)^2 \geq 0$.

III.28. Triunghiuri înscrise

„Nimeni să nu intre aici dacă nu știe geometrie.” - Platon²⁰¹

Triunghiul $A'B'C'$ este **înscris** în triunghiul ABC , dacă pe fiecare latură a triunghiului ABC se află câte un singur vârf al triunghiului $A'B'C'$, ($A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB)$)

Triunghiul $A'B'C'$ înscris în triunghiul ABC are laturile paralele cu trei ceviane

concurente ale triunghiului ABC dacă și numai dacă: $\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1$ sau

$$\frac{CA'}{BC} + \frac{AB'}{AC} + \frac{BC'}{AB} = 1.$$

Demonstrație. Fie AA_1, BB_1, CC_1 cevianele concurente. Laturile triunghiului $A'B'C'$ fiind paralele cu cevianele AA_1, BB_1, CC_1 rezultă că sunt posibile două ordonări:

i) $B - A' - A_1 - C$, $C - B' - B_1 - A$, $A - C' - C_1 - B$ (Fig. 444)

ii) $B - A_1 - A' - C$, $C - B_1 - B' - A$, $A - C_1 - C' - B$ (Fig. 445).

²⁰¹ Platon (428-348) – filosof, logician, mathematician grec

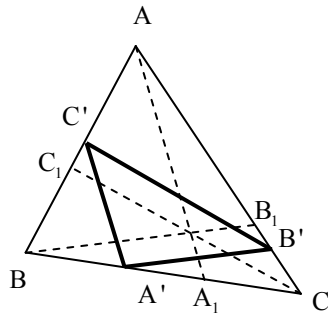


Fig. 444

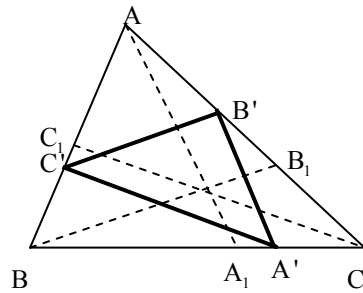


Fig. 445

i) Din reciproca teoremei lui Ceva rezultă $\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = 1$ (1). Notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA , respectiv AB și cu $x = \frac{BA'}{BC}, y = \frac{CB'}{CA}, z = \frac{AC'}{AB}, x, y, z \in (0, 1)$. Din teorema lui Thales rezultă $\frac{AC'}{AB} = \frac{A_1A'}{A_1B}$ de unde $z = 1 - \frac{BA'}{A_1B} = 1 - \frac{ax}{A_1B}$ adică $\frac{a}{A_1B} = \frac{1-z}{x}$, deci $\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{1-x-z}{x}$ (2). Analog, $\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{1-x-y}{y}$ (3) și $\frac{C_1B}{C_1A} = \frac{1-y-z}{z}$ (4). Fie $1-x-y-z = t$. Din relațiile (1), (2), (3) și (4) rezultă $t[t^2 + (x+y+z) \cdot t + (xy+yz+zx)] = 0$, adică $(1-x-y-z)[(1-x)(1-y)(1-z) + xyz] = 0$. Deoarece $(1-x)(1-y)(1-z) + xyz > 0$ rezultă că $x+y+z = 1$, relație echivalentă cu $\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1$. Cazul ii) se tratează analog.

III.29. Triunghiuri înscrise izotomice

„Matematica seamănă cu o moară: dacă veți turna în ea boabe de grâu, veți obține făină, dar dacă veți turna în ea tărâțe, tărâțe veți obține.” - Aldous Huxley²⁰²

Fie M și M' ; N și N' ; P și P' puncte izotomice pe laturile triunghiului ABC . Triunghiurile MNP și $M'N'P'$ se numesc **izotomice**.

1) Triunghiurile de contact și cel cotangentic corespunzătoare unui triunghi ABC sunt izotomice.

Demonstrație. Deoarece $BM = CM' = p - b$, $CN = AN' = p - c$ și $AP = BP' = p - a$ (Fig. 446) rezultă că triunghiurile de contact și cotangentic ale triunghiului ABC sunt izotomice, unde a, b, c și p lungimile laturilor și semiperimetrul triunghiului ABC .

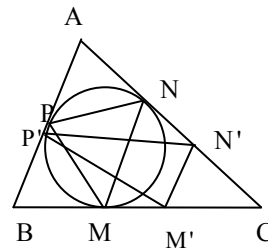


Fig. 446

²⁰²Aldous Huxley (1894-1963) – scriitor englez

2) Triunghiurile izotomice înscrise într-un triunghi au arii egale.

Demonstrație. Soluția 1. Fie $x = AP' = BP$, $y = AN' = CN$, $z = BM = CM'$,
 $\alpha = MM'$, $\beta = NN'$, $\gamma = PP'$. Avem: $A_{[MNP]} = A_{[ABC]} - [A_{[PAN]} + A_{[BMP]} + A_{[NCM]}]$ și
 $A_{[M'N'P']} = A_{[ABC]} - [A_{[P'AN']} + A_{[BM'P']} + A_{[N'CM']}]$. Arătăm că
 $A_{[PAN]} + A_{[BMP]} + A_{[NCM]} = A_{[P'AN']} + A_{[BM'P']} + A_{[N'CM']}$. Egalitatea precedentă este echivalentă
 cu $\frac{(x+\gamma)(y+\beta)\sin A}{2} + \frac{xz\sin B}{2} + \frac{(\alpha+z)y\sin C}{2} = \frac{xy\sin A}{2} + \frac{(x+\gamma)(z+\alpha)\sin B}{2} + \frac{z(y+\beta)\sin C}{2}$,
 adică: $x\alpha\sin B + \gamma z\sin B + \gamma\alpha\sin B + z\beta\sin C = x\beta\sin A + \gamma y\sin A + \gamma\beta\sin A + \alpha y\sin C$ și
 utilizând teorema sinusurilor obținem $x\alpha b + \gamma z b + \gamma\alpha b + z\beta c = x\beta a + \gamma y a + \gamma\beta a + \alpha y c$.
 Cum $a = 2z + \alpha$, $b = 2y + \beta$, $c = 2x + \gamma$ egalitatea precedentă devine evidentă, deci
 $A_{[MNP]} = A_{[M'N'P']}$.

Soluția 2. Fie MNP și $M'N'P'$ două triunghiuri izotomice înscrise în triunghiul ABC și
 $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{1-m}$, $\frac{CN}{NA} = \frac{n}{1-n}$, $\frac{AP}{PA} = \frac{p}{1-p}$. Afixele punctelor M , N și P sunt:
 $z_M = (1-m) \cdot z_B + m \cdot z_C$, $z_N = (1-n) \cdot z_C + n \cdot z_A$, $z_P = (1-p) \cdot z_A + p \cdot z_B$.
 Atunci, aria triunghiului MNP este egală cu

$$A_{[MNP]} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_M & \overline{z_M} & 1 \\ z_N & \overline{z_N} & 1 \\ z_P & \overline{z_P} & 1 \end{vmatrix} = [mnp + (1-m)(1-n)(1-p)] \cdot \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_A & \overline{z_A} & 1 \\ z_B & \overline{z_B} & 1 \\ z_C & \overline{z_C} & 1 \end{vmatrix} = [mnp + (1-m)(1-n)(1-p)] \cdot A_{[ABC]}$$

(*) . Analog, $\frac{BM'}{M'C} = \frac{1-m}{m}$, $\frac{CN'}{N'A} = \frac{1-n}{n}$ și $\frac{AP'}{P'B} = \frac{1-p}{p}$, iar $z_{M'} = (1-m) \cdot z_C + m \cdot z_B$,
 $z_{N'} = (1-n) \cdot z_A + n \cdot z_C$, $z_{P'} = (1-p) \cdot z_B + p \cdot z_A$. Aria triunghiului $M'N'P'$ se obține
 înlocuind în relația (*) pe m , n și p cu $1-m$, $1-n$ respectiv $1-p$, obținându-se aceeași
 expresie, deci $A_{[MNP]} = A_{[M'N'P']}$.

3) Centrul de greutate a două triunghiuri izotomice MNP și $M'N'P'$ înscrise în triunghiul ABC sunt simetrice față de centrul de greutate al triunghiului ABC .

Demonstrație. Din aplicația precedentă rezultă că afixul centrului de greutate al triunghiului
 MNP este $z_{G_1} = \frac{z_M + z_N + z_P}{3} = \frac{(1+n-p)z_A + (1+p-m)z_B + (1+m-n)z_C}{3}$, iar afixul
 centrului de greutate al triunghiului $M'N'P'$ este egal cu:

$$z_{G_2} = \frac{z_{M'} + z_{N'} + z_{P'}}{3} = \frac{(1-n+p)z_A + (1-p+m)z_B + (1-m+n)z_C}{3}, \quad \text{de unde}$$

$$\frac{z_{G_1} + z_{G_2}}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = z_G, \text{ adică tocmai afixul centrului de greutate al triunghiului } ABC.$$

Consecință: Centrul de greutate al triunghiului ABC este mijlocul segmentului ce unește centrele de greutate al triunghiului de contact respectiv cotangentic corespunzătoare triunghiului ABC .

III.30. Triunghiuri pseudoisoscele

„Multe capitole ale matematicii mi-au fost dragi. Matematica e una.” - Gr. Moisil²⁰³

Triunghiul ABC , în care bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C sunt egale, triunghiul ABC nefiind isoscel, se numește **pseudoisoscel**.

1) Dacă în triunghiul pseudoisoscel ABC , I'_a este simetricul punctului I_a - centrul cercului A -exînscriș al triunghiului ABC față de mijlocul laturii BC , atunci centrul cercului înscris (I) al triunghiului ABC aparține mediatoarei segmentului AI'_a . Demonstrație. Fie BE și CD cele două bisectoare exterioare egale

($E \in AC$, $D \in AB$), (Fig. 447) $AA_b \perp CD$, $A_b \in BC$, $AA_c \perp BE$, $A_c \in BC$, K_i, K_b, K_c picioarele înălțimilor duse din I_a , B respectiv C , în triunghiul BCI_a , $\{K'_b\} = BK_b \cap AA_b$, $\{K'_c\} = CK_c \cap AA_c$, $\{M\} = AA_b \cap BE$, $\{M'\} = AA_c \cap CD$.

Avem: $A_{[ABC]} = A_{[BCE]} - A_{[BAE]} = A_{[CAD]} - A_{[BCD]}$, $A_{[DCE]} = \frac{BE \cdot CK_c}{2}$. Deoarece $AK'_c \perp BE$,

rezultă că distanța de la A la BE este egală cu $K_c K'_c$, de unde $A_{[BAE]} = \frac{BE \cdot K_c K'_c}{2}$

și astfel: $A_{[ADC]} = \frac{BE(CK_c - K_c K'_c)}{2} = \frac{BE \cdot CK'_c}{2}$ (1). Analog

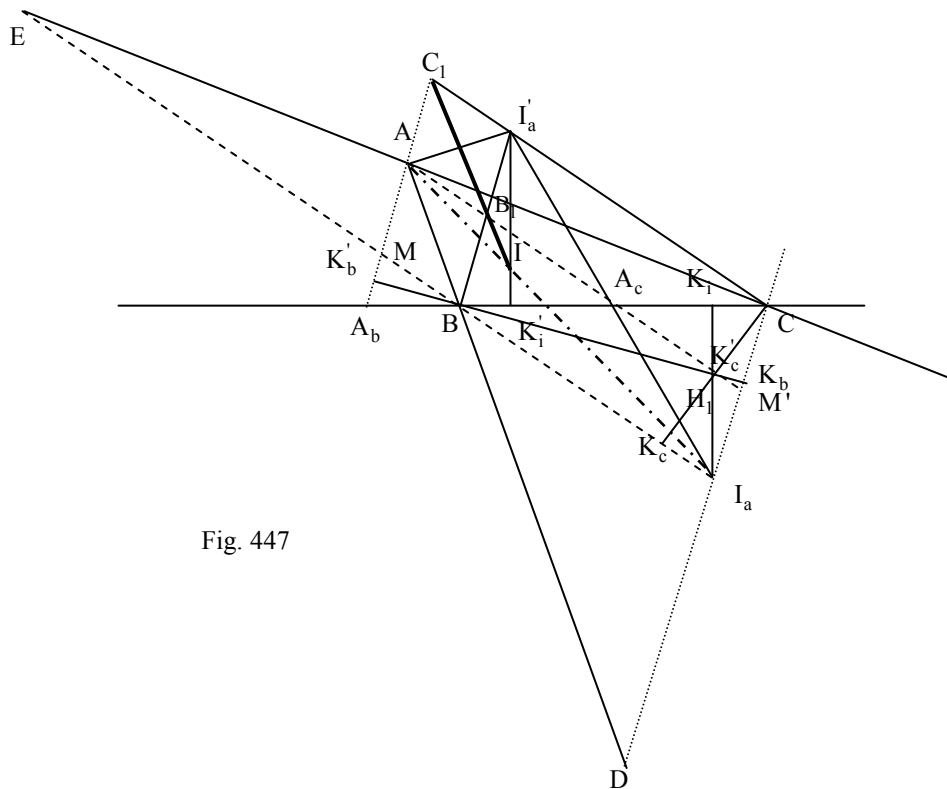


Fig. 447

$$A_{[ABC]} = A_{[CAD]} - A_{[BCD]} = \frac{BD \cdot BK'_b}{2} \quad (2). \text{ Din relațiile (1) și (2) rezultă } BK'_b = CK'_c.$$

Unghiurile triunghiurilor I_aBC au măsurile $90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{A}); 90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{B}); 90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{C})$.

$$\text{Atunci, } m(\angle C I_a) = m(\angle B I_a) = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{A})) = \frac{1}{2}m(\hat{A}),$$

$$m(\angle K'_c C M') = m(\angle K'_b B M) = \frac{1}{2}m(\angle BAC), \text{ de unde rezultă că } \Delta B K'_b M \equiv \Delta C K'_c M', \text{ și de aici}$$

$$BM \equiv CM' \quad (3). \text{ Fie } CC_1 \perp BE, C_1 \in AA_b, BB_1 \perp DC, B_1 \in AA_c, \{I'_a\} = BB_1 \cap CC_1.$$

Patrulateralele $BI_aCI'_a$ și BH_1CI sunt paralelograme, (unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC și H_1 ortocentrul triunghiului BI_aC). Deci I'_a și I sunt simetricele punctelor I_a și H_1 față de BC . Fie $I'_aK'_i \perp BC$, $K'_i \in BC$. Avem

$$m(\angle BI'_aK'_i) = m(\angle CI'_aH_1) = \frac{1}{2}m(\angle ACB). \text{ Cum patrulaterul } BI_aCI \text{ este inscriptibil rezultă că}$$

$$m(\angle BI_aI) = m(\angle BCI) = \frac{1}{2}m(\angle ACB). \text{ Dar } \angle BI_aI \equiv \angle M'AI_a \text{ (ca unghiuri alterne interne), deci}$$

$$m(\angle M'AI_a) = m(\angle BI'_aK'_i) = \frac{1}{2}m(\angle ACB) \quad (4). \text{ Din } I'_aC_1 \equiv BM, C_1A \equiv CM' \text{ și relația (3) rezultă}$$

$$I'_aC_1 \equiv C_1A \equiv AB_1, \text{ adică patrulaterul } AB_1I'_aC_1 \text{ este romb. Deci, } \angle AI'_aB_1 \equiv \angle F'_aAB_1 \text{ relație}$$

care împreună cu (4) dau $\angle AI'_a \equiv \angle H'_aA$, adică triunghiul IAI'_a este isoscel, deci $AI = II'_a = I_aH_1$ (5) și punctele C_1, B_1, I sunt coliniare deoarece dreapta IC_1 este perpendiculară pe segmentul $[AI'_a]$ în mijlocul acestuia.

2) Consecință:

Distanțele de la ortocentrul triunghiului I_aBC la vârfurile acestuia sunt respectiv egale cu distanțele de la centrul cercului înscris I la vârfurile triunghiului ABC .

3) Triunghiul ortic al triunghiului I_aBC este pseudoisoscel.

Demonstrație. Triunghiul ortic $K_bK_cK_i$ al triunghiului I_aBC are unghiurile de măsuri

$$180^\circ - 2 \left[90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle A) \right] = m(\angle A) \text{ respectiv } m(\hat{B}), m(\hat{C}) \text{ și atunci triunghiurile } K_bK_cK_i$$

și ABC sunt asemenea, deci triunghiul ortic al triunghiului I_aBC este pseudoisoscel.

4) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC este adevărată relația: $AI = r_a - r$ (r_a este raza cercului A -exînscriș și r raza cercului înscris în triunghiul ABC).

Demonstrație. Avem $AI = I'_aI = I'_aK'_i - IK'_i = r_a - r$ (6).

²⁰³ Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iași, membru al Academiei Române

5) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC este adevărată relația: $\frac{BI_a}{CI_a} = \frac{a-c}{b-a}$.

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor CA_cM' și CBI_a , respectiv a triunghiurilor BA_aM și BCI_a rezultă: $\frac{CI_a}{CM'} = \frac{CB}{CA_c}$ și $\frac{BI_a}{BM} = \frac{BC}{BA_b}$ de unde $CI_a \cdot CA_c = CM' \cdot CB = BM \cdot BC = BI_a \cdot BA_b$ (unde am folosit relația (3)) și de aici $\frac{BI_a}{CI_a} = \frac{CA_c}{BA_b}$ (7). Dar, $AB = BA_c = c$, deci $CA_c = a - c$ și analog $BA_b = b - a$. Astfel relația (7) devine: $\frac{BI_a}{CI_a} = \frac{a-c}{b-a}$ (8).

6) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC este adevărată relația: $AI^2 = BI \cdot CI$.

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor ABI și BH_1I_a rezultă: $\frac{BI_a}{AB} = \frac{I_aH_1}{BI} = \frac{BH_1}{AI}$; dar $I_aH_1 = II'_a = AI$ și $BH_1 = CI_1$, deci $\frac{BI_a}{AB} = \frac{AI}{BI} = \frac{CI}{AI}$ (9). Analog, $\frac{CI_a}{AC} = \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{AI}$ (10), de unde rezultă $AI^2 = BI \cdot CI$.

7) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC , $\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$.

Demonstrație. Înlocuim relația cunoscută $AI = 4R \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ și analoagele în egalitatea $AI^2 = BI \cdot CI$ și va rezulta $\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$.

8) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC , $II_a^2 = II_b \cdot II_c$.

Demonstrație. Deoarece $II_a = 4R \sin \frac{A}{2}$, $II_b = 4R \sin \frac{B}{2}$, $II_c = 4R \sin \frac{C}{2}$, egalitatea de demonstrat este echivalentă cu $\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$, demonstrată anterior.

9) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC , $AI = \frac{BI_a \cdot CI_a}{AI_a}$.

Demonstrație. Din relațiile (9) și (10) rezultă $BI_a \cdot CI_a = b \cdot c$. Cum în orice triunghi ABC avem $AI \cdot AI_a = b \cdot c$ rezultă $BI_a \cdot CI_a = AI \cdot AI_a$, deci $AI = \frac{BI_a \cdot CI_a}{AI_a}$.

10) Într-un triunghi ABC pseudoisoscel, $a^3 - (b+c)a^2 + 3abc - bc(b+c) = 0$.

Demonstrație. Din relațiile (9) și (10) rezultă $\frac{BI}{CI} = \frac{CI_a}{BI_a} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{b-a}{a-c} \cdot \frac{c}{b}$ (11). Din

asemănarea triunghiurilor BIK'_i și CK'_cA_c , respectiv CIK'_i și BK'_bA_b rezultă:

$$\frac{CA_c}{CI} = \frac{BK'_b}{CK'_i}. \quad \text{Cum} \quad BK'_b = CK'_c \quad \text{rezultă} \quad \frac{BI}{CI} = \frac{CA_c}{BA_c} \cdot \frac{BK'_i}{CK'_i}. \quad \text{Dar,}$$

$$BK'_i = CK_i = p-b, CK'_i = BK_i = p-c \quad (\text{unde } p = \frac{a+b+c}{2}), \text{ deci: } \frac{BI}{CI} = \frac{a-c}{b-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} \quad (12).$$

Din relațiile (11) și (12) rezultă legătura dintre laturile unui triunghi pseudoisoscel :

$$\frac{a-c}{b-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b-a}{a-c} \text{ adică } a^3 - (b+c)a^2 + 3abc - bc(b+c) = 0 \quad (13).$$

Observație: Relația precedentă poate fi obținută direct plecând de la egalitatea bisectoarelor exterioare CD și BE .

11) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC , $a^2 + bc = 4Rr_a$.

Demonstrație. Relația $a^3 - (b+c)a^2 + 3abc - bc(b+c) = 0$ este echivalentă cu

$$\frac{2abc}{b+c-a} = a^2 + bc \quad \text{și cum} \quad Rr_a = \frac{abc}{2(b+c-a)} \quad (\text{vezi "Cercurile exînscrise"}) \text{ rezultă}$$

concluzia.

12) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC , $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{bc} = 0$.

Demonstrație. Relația $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{bc} = 0$ este echivalentă cu

$$a^3 - (b+c)a^2 + 3abc - bc(b+c) = 0.$$

13) Într-un triunghi pseudoisoscel ABC , $\Pi_a = \frac{(r_a - r)^2}{r}$.

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor AIR și AI_aR' - unde R și R' sunt proiecțiile

punctelor I și I'_a pe latura AC - rezultă $\frac{AI}{AI_a} = \frac{r}{r_a}$, iar de aici $\frac{AI}{AI_a - AI} = \frac{r}{r_a - r}$ și

utilizând relația (6) obținem concluzia.

14) Consecință: Într-un triunghi pseudoisoscel ABC , $AI_a = \frac{AI \cdot r_a}{r} = \frac{(r_a - r) \cdot r_a}{r}$.

III.31. Triunghiuri cosimediane

„Nu s-ar putea oare reprezenta muzica drept matematica simțurilor și matematica drept muzică a rațiunii? Căci muzicianul simte matematica, iar matematicianul concepe muzica. Muzica-i vis, matematica este viața practică.”- James Sylvester²⁰⁴

Fie A', B', C' punctele de intersecție ale simedianelor triunghiului ABC cu cercul circumscris triunghiului ABC .

1) Laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt proporționale cu medianele triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie a', b', c' lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$. Avem:

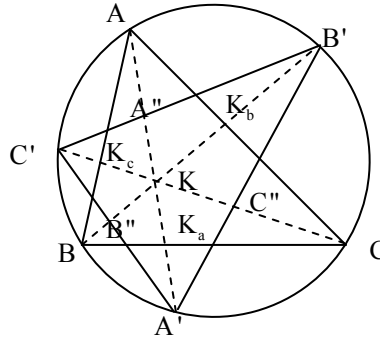


Fig. 448

$$m(\angle AA'C') = m(\angle ACC') = \frac{1}{2}m(\angle AC') \quad \text{și} \quad m(\angle AA'B') = m(\angle ABB') = \frac{1}{2}m(\angle AB') \quad \text{de unde}$$

$$m(\angle B'A'C') = m(\angle ABK) + m(\angle KCA) = m(\angle CBG) + m(\angle BCG) = 180^\circ - m(\angle BGC).$$

$$\text{Analog,} \quad m(\angle A'B'C') = 180^\circ - m(\angle AGC), m(\angle A'C'B') = 180^\circ - m(\angle AGB). \quad \text{Teorema}$$

$$\text{sinusurilor aplicată în triunghiurile } BCM_c \text{ și } BGC \text{ ne dă: } \frac{c/2}{\sin \angle GCB} = \frac{m_c}{\sin B} \quad \text{și}$$

$$\frac{(2/3) \cdot m_b}{\sin \angle GCB} = \frac{a}{\sin \angle BGC}, \quad \text{de unde} \quad \sin \angle GCB = \frac{bc}{4Rm_c} \quad \text{și} \quad \sin \angle BGC = \frac{3abc}{8Rm_b m_c}.$$

$$a' = 2R \sin(180^\circ - \angle BGC) = 2R \sin \angle BGC = \frac{3abc}{4m_b m_c}. \quad \text{Analog} \quad b' = \frac{3abc}{4m_a m_c} \quad \text{și} \quad c' = \frac{3abc}{4m_a m_b},$$

$$\text{deci} \quad \frac{a'}{m_a} = \frac{b'}{m_b} = \frac{c'}{m_c}. \quad \text{Analog se arată că} \quad \frac{a}{m_{a'}} = \frac{b}{m_{b'}} = \frac{c}{m_{c'}}.$$

2) Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ admit aceleași simediane AA', BB', CC' .

Demonstrație. Fie K_a, K_b, K_c intersecțiile dintre simediane cu laturile opuse, A'', B'', C'' intersecțiile simedianelor AA', BB', CC' cu laturile $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$.

$$\text{Avem: } \frac{C'A''}{A''B'} = \frac{A_{[A'A''C']}}{A_{[A'A''B']}} = \frac{A'C' \cdot AA'' \sin \alpha}{A'B' \cdot A'A'' \sin \beta} = \left(\frac{3abc}{4m_a m_b} \cdot \sin \alpha \right) : \left(\frac{3abc}{4m_a m_b} \cdot \sin \beta \right) = \frac{m_b}{m_c} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

²⁰⁴ James Sylvester (1814-1897) – matematician englez, profesor la Universitatea din Oxford, contribuții importante în algebră

(1), unde $\alpha = m(\overline{A''}A'C'), \beta = m(\overline{A''}A'B')$ și $m(\square C'CA) = \alpha \left(= \frac{1}{2}m(\overline{C'}A) \right)$,
 $m(\square ABB') = \beta \left(= \frac{1}{2}m(\overline{AB'}) \right)$. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul ACK_c și ABK_b dă:
 $\frac{\sin \alpha}{AK_c} = \frac{\sin A}{CK_c}, \frac{\sin \beta}{AK_b} = \frac{\sin A}{BK_b}$ (2). Deoarece BK_b și CK_c sunt simediane rezultă:
 $\frac{K_c A}{K_c B} = \left(\frac{b}{a} \right)^2, \frac{K_b A}{K_b C} = \left(\frac{c}{a} \right)^2$, de unde rezultă $K_c A = \frac{cb^2}{a^2 + b^2}, AK_b = \frac{bc^2}{a^2 + c^2}$, iar
 $BK_b = \frac{2acm_b}{a^2 + c^2}, CK_c = \frac{2abm_c}{a^2 + b^2}$ (3) (vezi „Simediane”). Din relațiile (2) și (3) rezultă:
 $\sin \alpha = \frac{bc}{4Rm_c}$ și $\sin \beta = \frac{bc}{4Rm_b}$ (4). Din relațiile (1) și (4) rezultă
 $\frac{C'A''}{A''B'} = \left(\frac{m_b}{m_c} \right)^2 = \left(\frac{b'}{c'} \right)^2$ (conform proprietății 1), deci AA'' este simediană în triunghiul
 $A'B'C'$. Analog se arată că BB'' și CC'' sunt simediane în triunghiul $A'B'C'$.

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ care admit aceleași simediane se numesc **triunghiuri cosimediane**.

3) Triunghiul circumpedal al punctului lui Lemoine al unui triunghi ABC și triunghiul ABC sunt triunghiuri cosimediane.

Demonstrație. Proprietatea este o reformulare a teoremei (1).

4) Două triunghiuri cosimediane au același punct al lui Lemoine.

Demonstrația rezultă din faptul că triunghiurile admit aceleași simediane.

5) Două triunghiuri cosimediane sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă.

6) Cercurile lui Apollonis ale triunghiului ABC intersectează cercul circumscris al triunghiului ABC în vârfurile triunghiului cosimedian.

Demonstrație. Vezi „Cercurile lui Apollonius”.

7) Între unghiurile triunghiurilor cosimediane ABC și $A'B'C'$ au loc relațiile:

$$ctgA + ctgA' = ctgB + ctgB' = ctgC + ctgC' = \frac{2}{3}ctg\omega \quad (\omega \text{ este unghiul lui Brocard}).$$

Demonstrație. $ctgA + ctgA' = ctgA + ctg(\pi - \square BGC) = ctgA - ctg(\square BGC)$, G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC . Teorema cosinusului aplicată în triunghiul BGC dă:

$$a^2 = \left(\frac{2}{3}m_b \right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c \right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}m_b \cdot \frac{2}{3}m_c \cdot \cos \square BGC \text{ sau : } \cos \square BGC = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{8m_b m_c}, \text{ de}$$

unde $\operatorname{ctg} \widehat{BGC} = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{8m_b m_c} \cdot \frac{8Rm_b m_c}{3abc} = \frac{(b^2 + c^2 - 5a^2) \cdot R}{3abc}$, iar $\operatorname{ctg} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} \cdot R$.

Avem $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} A' = \frac{R}{abc} \left[b^2 + c^2 - a^2 - \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{3} \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{abc} \cdot (b^2 + c^2 + a^2)$. Ținând

cont că: $\operatorname{ctg} \omega = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{4 \cdot A_{[ABC]}} = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{abc} \cdot R$ rezultă: $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} A' = \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \omega$. Analog se

arată că $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B' = \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C' = \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \omega$.

8) Două triunghiuri cosimediane au același unghi Brocard.

Demonstrație. Fie ω' unghiul lui Brocard al triunghiului $A'B'C'$. Atunci

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} A' = \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \omega \quad \text{și} \quad \operatorname{ctg} A' + \operatorname{ctg} A = \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \omega', \text{ de unde } \operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} \omega' \quad \text{și cum}$$

$\omega \leq 30^\circ, \omega' \leq 30^\circ$ (vezi „Punctele lui Brocard”) rezultă $\omega = \omega'$.

9) Două triunghiuri cosimediane au același cerc Brocard.

Demonstrație. Cercul lui Brocard este cercul ce are ca diamtru segmentul determinat de centrul cercului circumscris triunghiului și punctul lui Lemoine al aceluiași triunghi. Deoarece triunghiurile cosimediane au același cerc circumscris și același punct al lui Lemoine rezultă că au și același cerc Brocard.

10) Două triunghiuri cosimediane au aceleași puncte Brocard.

Demonstrație. Deoarece cercul lui Brocard trece prin punctele lui Brocard Ω și Ω' ale triunghiului ABC , Ω și Ω' sunt simetrice față de diametrul OK (vezi „Cercul lui Brocard”), iar triunghiurile cosimediane au același cerc Brocard, rezultă concluzia.

11) Două triunghiuri cosimediane au același al doilea triunghi Brocard.

Demonstrația este evidentă deoarece vârfurile celui de-al doilea triunghi Brocard sunt picioarele perpendicularelor duse din centrul cercului circumscris triunghiului de referință pe simedianele triunghiului.

III.32. Triunghiul celor trei imagini

„Matematica este o monstruoasă tautologie.” - Bernard Shaw²⁰⁵

Triunghiul $A^*B^*C^*$ ale cărui vârfuri sunt obținute prin simetria vârfurilor triunghiului ABC față de laturile opuse se numește **triunghiul celor trei imagini** al triunghiului ABC (Fig. 449).

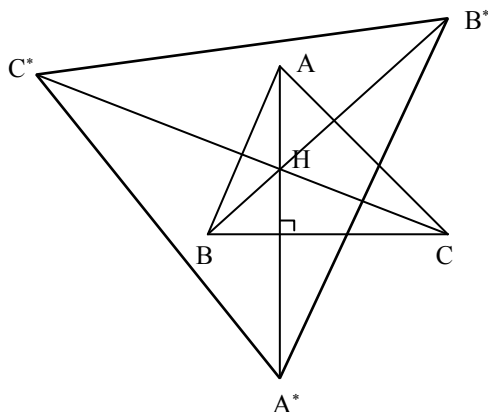


Fig. 449

1) Triunghiurile ABC și $A^*B^*C^*$ sunt omologice centrul de omologie fiind ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece dreptele AA^* , BB^* și CC^* sunt perpendiculare pe laturile BC , CA , respectiv AB rezultă că ele sunt concurente în ortocentrul triunghiului ABC , deci conform teoremei lui Desargues triunghiurile ABC și $A^*B^*C^*$ sunt omologice.

2) Centrul cercului circumscris triunghiului celor trei imagini $A^*B^*C^*$ corespunzător unui triunghi ABC este simetricul centrului cercului circumscris triunghiului ABC față de punctul lui Coșniță.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Coșniță”.

3) Cercurile circumscrise triunghiurilor AB^*C^* , BC^*A^* , CA^*B^* trec prin inversul punctului lui Coșniță față de cercul circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Coșniță”.

4) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și $A^*B^*C^*$ triunghiul celor trei imagini corespunzător triunghiului ABC . Cercurile circumscrise triunghiurilor AOA^* , BOB^* și COC^* se întâlnesc într-un punct care este inversul punctului izogonal conjugat al centrului cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Musselman”.

²⁰⁵ Bernard Shaw (1856 -1950) – scriitor irlandez, laureat al Premiului Nobel pentru Literatură în 1925

Teorema lui Boutte

2) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Triunghiul celor trei imagini $A^*B^*C^*$ este obținut prin omotetia de centru G și raport 4 a triunghiului podar al centrului cercului lui Euler al triunghiului ABC .

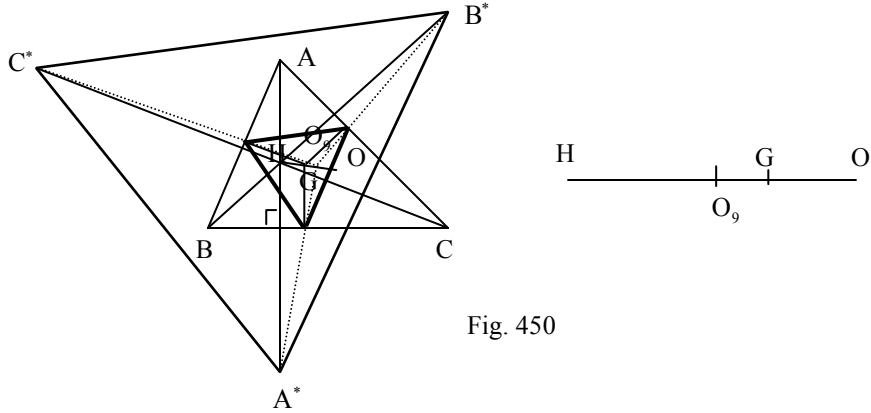


Fig. 450

Fie M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB și A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor M_bM_c, M_cM_a respectiv M_aM_b . Evident, triunghiul $A_1B_1C_1$ se obține din triunghiul ABC prin omotetia de centru G și raport $1/4$. Fie X omoteticul lui A^* prin $\mathcal{H}(G, \frac{1}{4})$ (Fig. 450). Arătăm că X este proiecția centrului cercului lui Euler (O_9) al triunghiului ABC pe BC .

Cum $\frac{GA_1}{GA} = \frac{GX}{GA^*} = \frac{1}{4}$ din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $A_1X \parallel AA^*$. Dar

$AA^* \perp M_bM_c$ de unde rezultă că $A_1X \perp M_bM_c$, deci $A_1X \perp BC$. Cu alte cuvinte $X \in BC$ (Fig. 451). Evident, X este simetricul punctului A_1 față de B_1C_1 (care este linie mijlocie în triunghiul $M_aM_bM_c$); cu alte cuvinte punctul X aparține cercului circumscris triunghiului $M_aM_bM_c$, adică cercului lui Euler. Urmează că X este proiecția lui O_9 pe BC . Analog se demonstrează că imaginile punctelor B^* și C^* prin omotetia $\mathcal{H}(G, \frac{1}{4})$ sunt proiecțiile lui O_9 pe CA , respectiv AB .

Observație: Dacă $O_9^a O_9^b O_9^c$ este triunghiul podar al centrului cercului lui Euler al triunghiului ABC , atunci

$$\frac{GA^*}{GO_9^a} = \frac{GB^*}{GO_9^b} = \frac{GC^*}{GO_9^c} = 4.$$

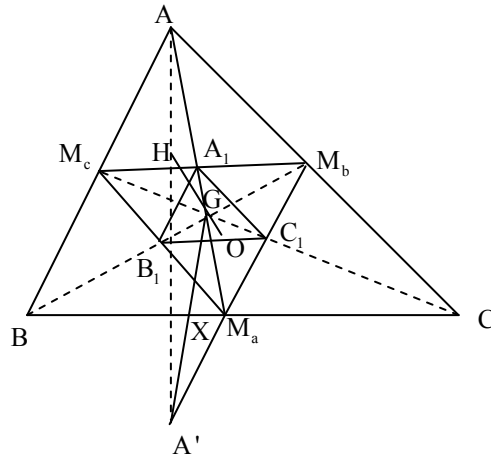


Fig. 451

III.33. Triunghiuri izoliniare

„Cel mai fericit om este acela care face fericiti un număr cât mai mare de oameni.” - Lev Tolstoi²⁰⁶

Fie două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ în același plan. Dacă paralelele duse prin A, B, C la laturile $B'C', C'A'$ respectiv $A'B'$ intersectează laturile opuse în trei puncte coliniare α, β, γ atunci și paralelele duse prin A', B', C' la BC, CA respectiv AB întâlnesc laturile opuse $B'C', C'A'$ și $A'B'$ în trei puncte coliniare α', β', γ' .

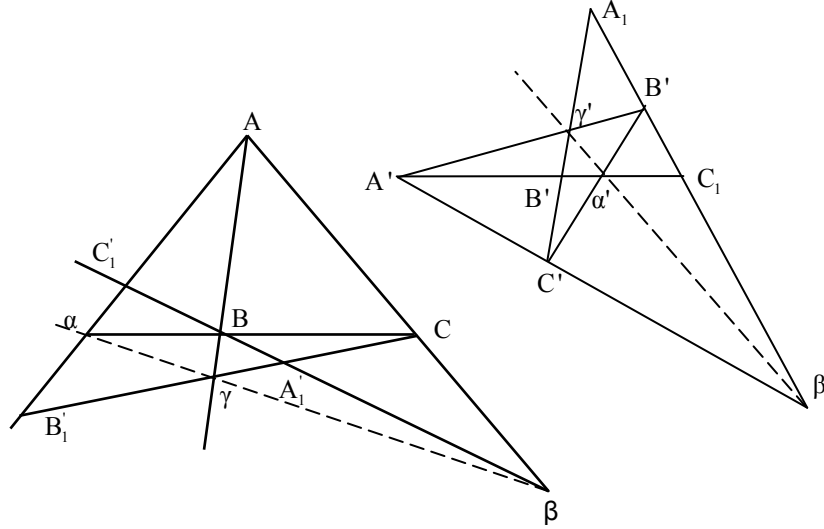


Fig. 452

Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul determinat de dreptele $A\alpha, B\beta$ și $C\gamma$, iar $A_1B_1C_1$ triunghiul determinat de dreptele $A'\alpha', B'\beta'$ și $C'\gamma'$. Din asemănarea triunghiurilor $A'B'\alpha'$ cu $CB_1'\alpha$, respectiv $C'\alpha'A'$ cu $C_1'\alpha B$ (triunghiuri cu laturile paralele două câte două) rezultă: $\frac{\alpha'B'}{\alpha B_1'} = \frac{A'\alpha'}{\alpha C}$ și $\frac{\alpha'C'}{\alpha C_1'} = \frac{A'\alpha'}{\alpha B}$. Prin împărțirea relațiilor precedente se obține:

$$\frac{\alpha'B'}{\alpha'C'} = \frac{\alpha B_1' \cdot \alpha B}{\alpha C_1' \cdot \alpha C}. \text{ Analog, se arată egalitățile: } \frac{\gamma'A'}{\gamma'B'} = \frac{\gamma A_1' \cdot \gamma A}{\gamma B_1' \cdot \gamma B} \text{ și}$$

$$\frac{\beta'C'}{\beta'A'} = \frac{\beta C_1' \cdot \beta C}{\beta A_1' \cdot \beta A}, \text{ de unde rezultă că } \frac{\alpha'B'}{\alpha'C'} \cdot \frac{\beta'C'}{\beta'A'} \cdot \frac{\gamma'A'}{\gamma'B'} =$$

$$\left(\frac{\alpha B_1'}{\alpha C_1'} \cdot \frac{\beta C_1'}{\beta A_1'} \cdot \frac{\gamma A_1'}{\gamma B_1'} \right) \cdot \left(\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \text{ (unde s-a aplicat teorema lui Menelaus)}$$

²⁰⁶ Lev Tolstoi (1828-1910) – scriitor rus

triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și ABC cu transversala $\alpha\beta\gamma$) și din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul $A'B'C'$ rezultă că punctele α', β', γ' sunt coliniare.

Observație: Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ ce îndeplinesc condițiile de mai sus se numesc **izoliniare**.

III.34. Triunghiuri metaparalele

„Azi facem matematica ce va fi folosită mâine și mai ales poimăine. Dacă n-am face-o azi, poimăine ar trebui s-o importăm.” – Gr. Moisil²⁰⁷

1) Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Dacă paralelele duse din A, B, C la $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$ sunt concurente într-un punct D , atunci paralelele duse din A', B', C' la $BC, CA,$ respectiv AB sunt concurente într-un punct D' .

Demonstrație. Fie $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), A'(x'_1, y'_1), B'(x'_2, y'_2), C'(x'_3, y'_3)$. Ecuațiile paralelelor duse din A, B, C la dreptele $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$ sunt:

$$x(y'_3 - y'_2) - y(x'_3 - x'_2) = x_1(y'_3 - y'_2) - y_1(x'_3 - x'_2), x(y'_1 - y'_3) - y(x'_1 - x'_3) = x_2(y'_1 - y'_3) - y_2(x'_1 - x'_3)$$

$$x(y'_2 - y'_1) - y(x'_2 - x'_1) = x_3(y'_2 - y'_1) - y_3(x'_2 - x'_1). \text{ Condiția de concurență este}$$

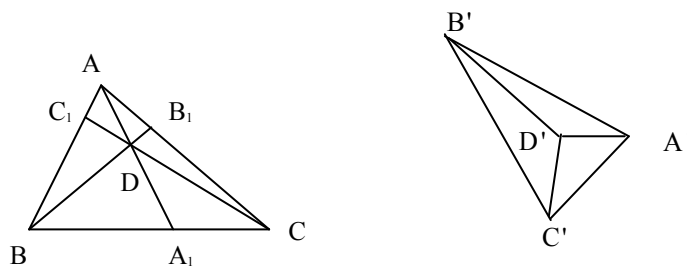


Fig. 453

echivalentă cu: $x_1(y'_3 - y'_2) + x_2(y'_1 - y'_3) + x_3(y'_2 - y'_1) = y_1(x'_3 - x'_2) + y_2(x'_1 - x'_3) + y_3(x'_2 - x'_1)$,

adică
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (*)$$
. Simetria relației precedente demonstrează

teorema .

Observații:

1) Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ ce au proprietățile de mai sus se numesc **metaparalele** sau **paralelogice**, iar punctele D și D' se numesc **centre de metaparalelism**.

²⁰⁷ Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iași, membru al Academiei Române

2) Vom nota cu $ABC \square A'B'C'$ faptul că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt metaparalele.

2) Dacă $ABC \square A'B'C'$, $ABC \square B'C'A'$, atunci $ABC \square C'B'A'$.

Demonstrație: Utilizând teorema precedentă relațiile $ABC \square A'B'C'$ și $ABC \square$

$B'C'A'$ sunt echivalente cu: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, respectiv $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_2 & y'_3 & y'_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_2 & x'_3 & x'_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$. Din egalitățile precedente rezultă: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_3 & y'_2 & y'_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_3 & x'_2 & x'_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, adică ABC

$\square C'B'A'$.

3) Dacă $ABC \square M_1M_2M_3$, $ABC \square M_2M_3M_4$, ... , $ABC \square M_{n-1}M_nM_1$, atunci $ABC \square M_nM_1M_2$.

Demonstrația proprietății se realizează utilizând relația (*).

III.35. Triunghiul pedal

„Cea mai mare dorință a mea este să comunic și altora
pasiunea mea pentru matematică.” – Miron Nicolescu²⁰⁸

Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC , picioarele cevienelor AM , BM , CM sunt vârfurile unui triunghi $M_1M_2M_3$ numit **triunghiul pedal** al lui M (Fig. 454).

1) Triunghiul pedal al centrului de greutate al unui triunghi ABC este triunghiul median corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul median”.

2) Triunghiul pedal al ortocentrului unui triunghi ABC este triunghiul ortic corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul ortic”.

3) Triunghiul pedal al punctului lui Gergonne al unui triunghi ABC este triunghiul de contact corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gergonne”.

4) Triunghiul pedal al punctului lui Nagel al unui triunghi ABC este triunghiul cotangent corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Nagel”.

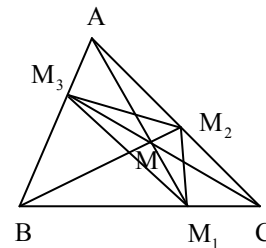


Fig. 454

²⁰⁸ Miron Nicolescu (1903-1975) – matematician român, membru al Academiei Române, contribuții în analiza matematică

5) Fie $A'B'C'$ **triunghiul pedal al centrului cercului circumscris triunghiului ABC .**

Atunci, $\frac{AO}{OA'} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A}$, $\frac{BO}{OB'} = \frac{\sin 2C + \sin 2A}{\sin 2B}$, $\frac{CO}{OC'} = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C}$.

Demonstrație. Vezi „Centrul cercului circumscris unui triunghi”.

6) Dacă $\Omega_a\Omega_b\Omega_c$ **este triunghiul pedal al primului punct al lui Brocard Ω corespunzător unui triunghi ABC , $\Omega_a \in (BC), \Omega_b \in (CA), \Omega_c \in (AB)$, atunci**

$$\frac{B\Omega_a}{\Omega_a C} = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \frac{C\Omega_b}{A\Omega_b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ și } \frac{A\Omega_c}{B\Omega_c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Demonstrație. Vezi „Punctele lui Brocard”.

7) Dacă $\Omega'_a\Omega'_b\Omega'_c$ **este triunghiul pedal al celui de-al doilea punct Brocard, $\Omega'_a \in (BC)$,**

$$\Omega'_b \in (CA), \Omega'_c \in (AB), \text{ atunci } \frac{B\Omega'_a}{\Omega'_a C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2, \frac{C\Omega'_b}{\Omega'_b A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \frac{A\Omega'_c}{\Omega'_c B} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Demonstrație. Vezi „Punctele lui Brocard”.

8) **Triunghiul pedal al retrocentului R al unui triunghi ABC este triunghiul podar al punctului lui Longchamps corespunzător triunghiului ABC .**

Demonstrație. Vezi „Retrocentrul unui triunghi”.

9) **Triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ și triunghiul pedal al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC sunt ortologice.**

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler”.

10) **În triunghiul ABC fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al unui punct Q , astfel încât**

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{p}{n}, \frac{CB'}{B'A} = \frac{m}{p} \text{ și } \frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m}. \text{ Dacă } z_A, z_B, z_C \text{ sunt afixele punctelor } A, B, C, \text{ atunci}$$

$$\text{afixul punctului } Q \text{ este } z_Q = \frac{mz_A + nz_B + pz_C}{m + n + p}.$$

Demonstrație. Afixele punctelor A', B', C' sunt $z_{A'} = \frac{nz_B + pz_C}{n + p}$, $z_{B'} = \frac{mz_A + pz_C}{m + p}$ și

$$z_{C'} = \frac{mz_A + nz_B}{m + n}. \text{ Fie punctul } Q' \left(\frac{mz_A + nz_B + pz_C}{m + n + p} \right). \text{ Utilizând condiția de coliniaritate a}$$

$$\text{trei puncte } D(z_D), E(z_E) \text{ și } F(z_F) - \text{ anume: } \begin{vmatrix} z_D & \overline{z_D} & 1 \\ z_E & \overline{z_E} & 1 \\ z_F & \overline{z_F} & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ rezultă fără dificultate că}$$

punctele A, A', Q' ; B, B', Q' ; respectiv C, C', Q' sunt coliniare, iar cum punctul Q' aparține celor trei ceviane AA', BB', CC' rezultă că $Q \equiv Q'$.

11) În triunghiul ABC fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al unui punct P , astfel încât $\frac{BA'}{A'C} = \nu$, $\frac{AB'}{B'C} = \mu$ și $\frac{AC'}{C'B} = \lambda$. Atunci, pentru orice punct din planul triunghiului

$$ABC \text{ este adevărată relația: } \overrightarrow{MP} = \frac{1}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MA} + \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MB} + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MC}.$$

Demonstrație. Din teorema lui Ceva avem: $\lambda \cdot \nu \cdot \frac{1}{\mu} = 1$, deci $\nu = \frac{\mu}{\lambda}$ (1). Din teorema lui

$$\text{Van - Aubel obținem: } \frac{PA}{PA'} = \lambda + \mu, \text{ de unde rezultă } \overrightarrow{MP} = \frac{1}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MA} + \frac{\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MA'}$$

(2). Din $\frac{BA'}{A'C} = \nu$ rezultă $\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{1+\nu} \overrightarrow{MB} + \frac{\nu}{1+\nu} \overrightarrow{MC}$ (3). Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă concluzia.

Cazuri particulare:

$$1) \text{ Dacă } P \equiv G, \text{ atunci } \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MC}.$$

$$2) \text{ Dacă } P \equiv I, \text{ atunci } \overrightarrow{MI} = \frac{a}{a+b+c} \overrightarrow{MA} + \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{MB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{MC}.$$

$$3) \quad \text{Dacă} \quad P \equiv O, \quad \text{atunci}$$

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} (\sin 2A \cdot \overrightarrow{MA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{MB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{MC}).$$

$$4) \quad \text{Dacă} \quad P \equiv H, \quad \text{atunci}$$

$$\overrightarrow{MH} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \overrightarrow{MA} + \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \overrightarrow{MB} + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \overrightarrow{MC} \text{ (pentru un triunghi nedreptunghic).}$$

III.36. Triunghiul anticevian

„O teoremă de geometrie este o legătură organică între părțile unei figuri.” – Gh. Țițeica²⁰⁹

Fie P un punct din planul triunghiului ABC . **Triunghiul anticevian** $A'B'C'$ al triunghiului ABC corespunzător punctului P este obținut astfel: $A \in B'C'$, $B \in A'C'$, $C \in B'A'$ iar $AA' \cap BB' \cap CC' = \{P\}$ (Fig. 455). Punctul P se numește **punct anticevian**.

1) Triunghiul ABC este triunghiul cevian al punctului P în raport cu triunghiul $A'B'C'$.

2) Triunghiul anticevian corespunzător centrului cercului înscris (I) în triunghi este triunghiul antisuplementar.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antisuplementar”.

²⁰⁹ Gheorghe Țițeica (1873-1939) – matematician român, profesor la Universitatea din București, membru al Academiei Române, contribuții importante în geometrie

3) *Triunghiul anticevian corespunzător centrului de greutate (G) este triunghiul anticomplementar.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul anticomplementar”.

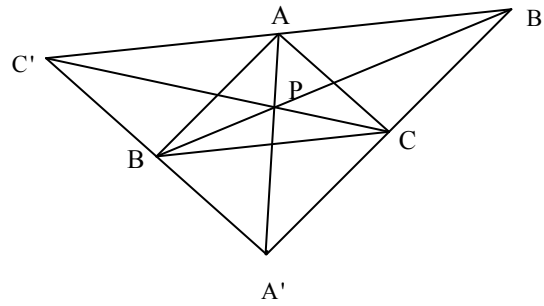


Fig. 455

4) *Triunghiul anticevian corespunzător punctului simedian (K) este triunghiul tangențial.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul tangențial”.

5) *Fie $A'B'C'$ triunghiul anticevian al unui punct P în raport cu un triunghi ABC . Bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$ intersectează laturile BC , CA și AB în punctele A'' , B'' , respectiv C'' . Dreptele AA'' , BB'' și CC'' sunt concurente.*

Demonstrație. Din teorema

bisectoarei rezultă $\frac{BA''}{A''C} = \frac{BA'}{A'C'}$,

$\frac{CB''}{B''A} = \frac{CB'}{B'A'}$ și $\frac{AC''}{C''B} = \frac{AC'}{C'B'}$. Din

teorema lui Ceva aplicată în

triunghiul anticevian $A'B'C'$ rezultă $\frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{CA'} = 1$, de unde

se obține:

$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

și din reciproca teoremei lui Ceva aplicată în triunghiul ABC rezultă că dreptele AA'' , BB'' și CC'' sunt concurente.

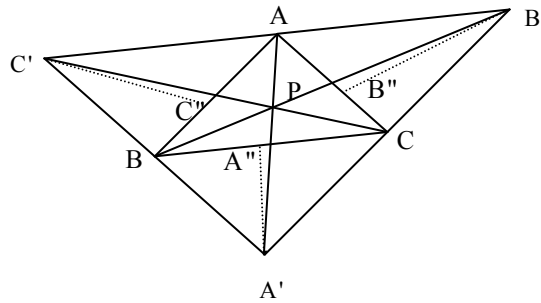


Fig. 456

III.37. Triunghiuri ortogonale

„Am închis uşile ca să nu intre greşeala. Atunci adevărul m-a întrebat: pe unde voi intra eu?” - R. Tagore²¹⁰

Două triunghiuri se numesc **ortogonale** dacă au laturile două câte două perpendiculare una pe alta.

Să se construiască triunghiul $A'B'C'$ având vârfurile pe dreptele suport ale laturilor triunghiului ABC astfel încât cele două triunghiuri să fie ortogonale.

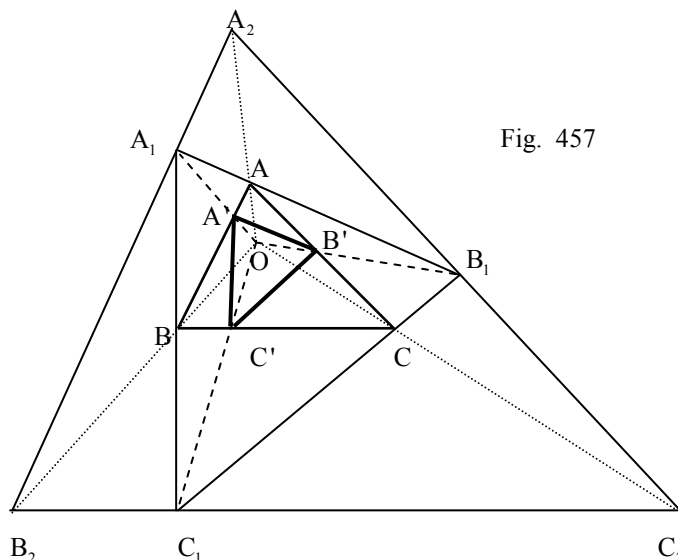


Fig. 457

Demonstrație. Presupunem că triunghiul $A'B'C'$ astfel încât $A'C' \perp AC, A'B' \perp AB, B'C' \perp BC$, $A' \in AC, B' \in AB, C' \in BC$. Construim perpendicularele pe laturile triunghiului ABC în vârfurile acestui triunghi și fie $A_1B_1C_1$ triunghiul obținut prin intersecțiile acestor perpendiculare. Avem $A_1C_1 \perp AC, A_1B_1 \perp AB, B_1C_1 \perp BC$. Repetând procedeul de mai sus, obținem triunghiul $A_2B_2C_2$ cu $A_2C_2 \perp A_1C_1, A_2B_2 \perp A_1B_1, B_2C_2 \perp B_1C_1$. Se observă $A_2C_2 \parallel AC, A_2B_2 \parallel AB, B_2C_2 \parallel BC$. Se poate considera că triunghiul $A_2B_2C_2$ se obține din triunghiul ABC printr-o omotetie. Fie O centrul acestei omotetii, centru care se află la intersecția dreptelor AA_2, BB_2, CC_2 . În mod analog se observă că $A_1B_1C_1$ se poate obține din $A'B'C'$ printr-o omotetie și deoarece $\frac{OA}{OA_2} = \frac{OA'}{OA_1}$ rezultă că omotetia are același centru O . Din cele

prezentate rezultă procedeul de construcție a două triunghiuri ortogonale: i) se construiește triunghiul $A_1B_1C_1$; ii) se construiește triunghiul $A_2B_2C_2$; iii) unim A cu A_2, B cu B_2 și se determină centrul omotetiei O ; iv) unim apoi O cu A_1, B_1, C_1 și la intersecția cu dreptele suport ale laturilor ABC găsim punctele A', B', C' care sunt vârfurile triunghiului căutat. Construcția de mai sus este valabilă indiferent de natura triunghiului.

²¹⁰ Rabindranath Tagore (1861-1941) –scriitor și filosof indian, laureat al Premiului Nobel pentru Literatură

III.38. Triunghiul lui Carnot²¹¹

„Geometria este limbajul omului... de la nașterea sa, omul nu a acționat decât pe fundamentul geometriei, pe care a pătruns-o cu atâtă claritate încât putem admite că ea este aceea care ne condiționează.” - Charles le Corbusier²¹²

Fie H ortocentrul triunghiului ABC și O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCH, ACH, ABH . Triunghiul $O_a O_b O_c$ se numește **triunghiul lui Carnot**, iar cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, AHC, AHB se numesc **cercurile lui Carnot** - $(C_a), (C_b), (C_c)$.

1) Cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, AHC și AHB sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor AH, BH, CH , H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor triunghiului ABC , O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și O_a simetricul lui O față de BC . Atunci, $AH \equiv OO_a$ și $AH \parallel OO_a$ de unde rezultă că patrulaterul OO_aHA este paralelogram. Deci, $HO_a \equiv OA (= R)$ (1) și cum OCO_aB este romb rezultă că $O_aC \equiv O_aB \equiv OC \equiv OB (= R)$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că $O_aC \equiv O_aB \equiv O_aH (= R)$, deci O_a este centrul cercului circumscris

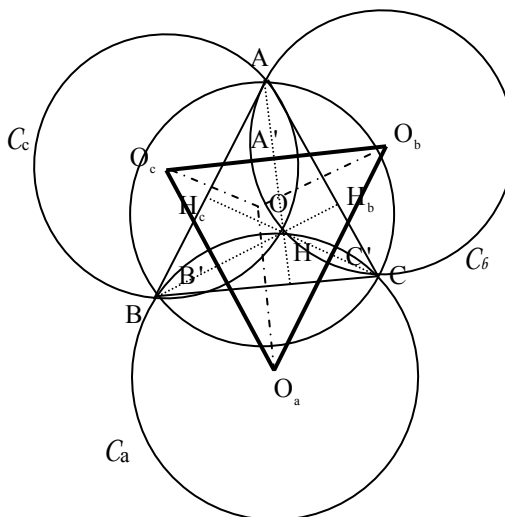


Fig. 458

triunghiului BHC , adică $O_a \equiv O_a$. Analog, O_b și O_c sunt simetricele lui O în raport cu laturile AC , respectiv AB . Cercul circumscris triunghiului BHC este congruent cu cercul circumscris ABC . Analog, cercurile circumscrise triunghiurilor AHC și AHB sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC .

Observații:

- 1) Laturile triunghiului lui Carnot conțin punctele lui Euler (A', B', C') ale triunghiului ABC .
- 2) Distanțele de la centrul cercului circumscris triunghiului ABC la centrele O_a, O_b, O_c sunt egale cu AH, BH , respectiv CH .
- 3) Centrele cercurilor lui Carnot sunt simetricele centrului cercului circumscris (O) al triunghiului ABC față de laturile triunghiului ABC .

2) Triunghiurile $O_a O_b O_c$ și ABC sunt congruente.

²¹¹ Lazare Carnot (1753-1823) – matematician și inginer francez

²¹² Charles le Corbusier (1877-1965) – arhitect, pictor francez de origine elvețiană

Demonstrație. Cum BO_aCO și $AOCO_b$ sunt romburi rezultă: $BO_a \parallel OC \parallel AO_b$ și $BO_a \equiv OC \equiv AO_b (=R)$, deci patrulaterul ABO_aO_b este paralelogram, adică $AB \equiv O_aO_b$. Analog, $AC \equiv O_aO_c$ și $BC \equiv O_bO_c$, triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC sunt congruente.

3) Triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC sunt omotetice.

Demonstrație: Fie O_9 mijlocul segmentului OH . Atunci, triunghiul $O_aO_bO_c$ se obține prin omotetia de centru O_9 și raport -1, a triunghiului ABC .

4) Triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC au același cerc al lui Euler și aceeași dreaptă a lui Euler.

Demonstrație. În triunghiul $O_aO_bO_c$, O este ortocentrul său, iar H este centrul cercului circumscris, deci are aceeași dreaptă Euler cu triunghiul ABC și evident același cerc al lui Euler.

5) Cercurile lui Carnot sunt simetrice cercului circumscris triunghiului dat în raport cu laturile corespunzătoare.

Demonstrație. Deoarece ortocentrul H al triunghiului ABC aparține cercului circumscris triunghiului BHC , simetricul său față de latura BC , aparține cercului circumscris triunghiului ABC , iar cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și BHC sunt congruente, rezultă că cele două cercuri sunt simetrice față de latura BC a triunghiului ABC . Analog, se arată că și celelalte două cercuri Carnot sunt simetrice față de laturile AC , respectiv AB .

6) Fie H ortocentrul unui triunghi ABC , (C_a) , (C_b) , (C_c) cercurile lui Carnot corespunzătoare triunghiului ABC , iar A_b și A_c al doilea punct de intersecție dintre cercul (C_a) cu laturile AC respectiv AB . Analog se definesc punctele B_c și B_a , respectiv C_a și C_b determinate de intersecțiile cercurilor (C_b) , respectiv (C_c) cu laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC . Ortocentrul triunghiului ABC este centrul cercurilor circumscrise triunghiurilor AA_bA_c , BB_cB_a , CC_cC_b .

Demonstrație.

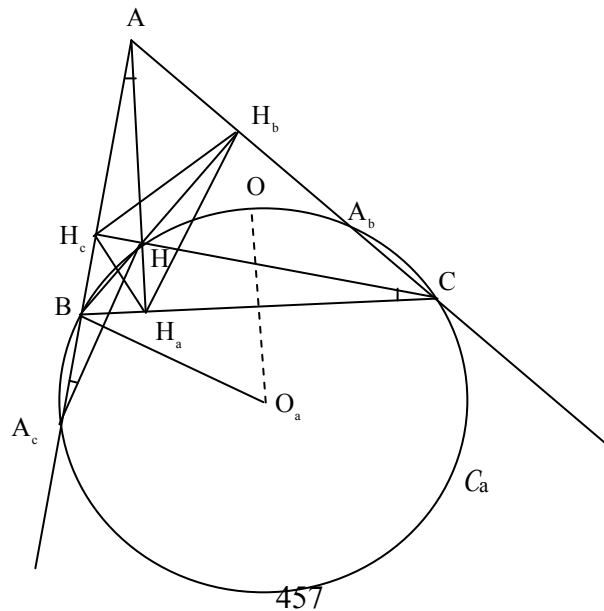


Fig. 459

Avem $m(\widehat{HAH_c}) = 90^\circ - m(\widehat{H_cHA}) = 90^\circ - m(\widehat{H_aHC}) = m(\widehat{HCH_a})$ (1). În cercul (C_a) $m(\widehat{BA_cH}) = m(\widehat{HCB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BH})$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă $\widehat{HAB} \equiv \widehat{HA_cH}$, deci triunghiul AHA_c este isoscel, de unde $AH \equiv HA_c$ (3). Analog se arată că $AH \equiv HA_b$ (4). Din relațiile (3) și (4) rezultă $AH \equiv HA_c \equiv HA_b$, deci H este centrul cercului circumscris triunghiului AA_bA_c . Analog, se arată că H este centrul cercului circumscris triunghiurilor BB_cB_a și CC_cC_b .

7) Fie O_a centrul cercului Carnot (C_a) și $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC .

Atunci: $BO_a \perp H_aH_b$ și $CO_a \perp H_aH_c$.

Demonstrație. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , atunci $OC \perp H_aH_b$ (1) (vezi „Triunghiul ortic”) – Fig. 459. Patrulaterul $BOCO_a$ fiind un romb - datorită faptului că O_a este simetricul lui O față de BC - rezultă $BO_a \parallel OC$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că $BO_a \perp H_aH_b$. Analog, se arată $CO_a \perp H_aH_c$.

Observație: Analog se arată că $AO_b \perp H_bH_a$, $CO_b \perp H_bH_c$ și $AO_c \perp H_cH_a$, $BO_c \perp H_cH_b$.

8) Fie A_1, B_1, C_1 punctele de intersecție dintre bisectoarele interioare ale triunghiurilor A, B , respectiv C cu cercul circumscris triunghiului ABC . Triunghiul $O_1O_2O_3$, având vârfurile în centrele cercurilor Carnot ale triunghiului $A_1B_1C_1$ este omologic cu triunghiul ABC , centrul de omologie fiind un punct al lui Kariya al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Kariya”.

9) Tangentele duse în ortocentrul H al unui triunghi ABC la cercurile lui Carnot (C_a) , (C_b) , (C_c) intersectează laturile BC, CA , respectiv AB în trei puncte coliniare.

Demonstrație. Fie A', B', C' punctele determinate de intersecțiile dintre tangentele și laturile triunghiului, iar A'', B'', C'' al doilea punct de intersecție dintre dreptele

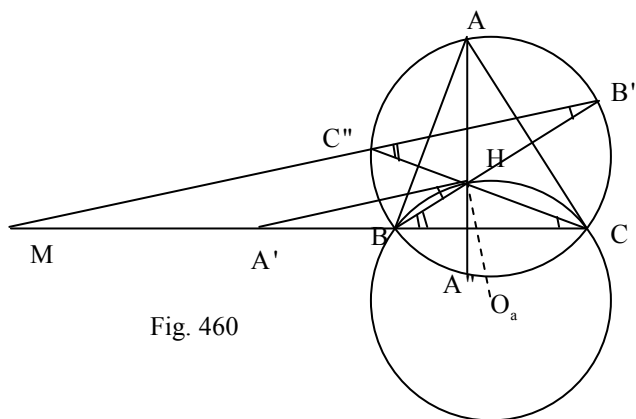


Fig. 460

AH, BH, CH cu cercul circumscris triunghiului ABC . Avem

$m(\square BCC'') = m(\square BB''C'') = \frac{1}{2}m(\square BC'')$ și cum $A'H$ este tangentă cercului (C_a) rezultă $m(\square A'HB) = m(\square HCB)$, de unde $\square A'HB \equiv \square C''B''B$, deci dreptele $A'H$ și $B''C''$ sunt paralele. Fie $\{M\} = B''C'' \cap BC$. Din asemănarea triunghiurilor $A'BH$ cu MBB'' și $A'HC$ cu MCC'' rezultă: $\frac{A'B}{MA'} = \frac{BH}{HB''}$ și $\frac{A'C}{MA'} = \frac{HC}{HC''}$, de unde $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BH}{HC} \cdot \frac{HC''}{HB''}$. Analog, se arată că $\frac{B'C}{B'A} = \frac{CH}{HA} \cdot \frac{HA''}{HC''}$ și $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AH}{HB} \cdot \frac{HB''}{HA''}$. Atunci $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, deci punctele A', B', C' sunt coliniare.

10) Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Ortocentrele triunghiurilor $AC_b C_c$, $BC_a C_c$, $CC_a C_b$ sunt centrele cercurilor Carnot ale triunghiului $C_a C_b C_c$.

Demonstrație. Fie $C_c C'_c$ și $C_b C'_b$ înălțimi în triunghiul $AC_b C_c$ și H_1 ortocentrul triunghiului $AC_b C_c$. Atunci $C'_c C'_b \perp IC_b$ și $C_b C'_b \perp IC_c$, deci patrulaterul $IC_b H_1 C'_c$ este paralelogram (Fig. 461). Cum $IC_c \equiv IC_b$ rezultă că patrulaterul $IC_b H_1 C'_c$ este romb, deci H_1 este simetricul centrului cercului circumscris triunghiului de contact față de latura $C_b C_c$, ceea ce arată că H_1 este centrul cercului Carnot corespunzător laturii $C_b C_c$. Analog se arată că ortocentrele triunghiurilor $BC_a C_c$ și $CC_a C_b$ sunt centrele cercurilor Carnot corespunzătoare laturilor $C_a C_c$ respectiv $C_b C_a$.

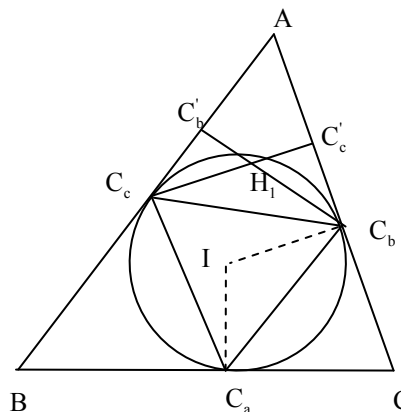


Fig. 461

11) Laturile triunghiului Carnot trec prin punctele euleriene A', B', C' ale triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă din construcție.

12) Triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul median al triunghiului lui Carnot $O_a O_b O_c$.

Demonstrație. Deoarece $AA' \equiv A'H$ și $O_c A \equiv O_c H \equiv O_b A \equiv O_b H$ rezultă că patrulaterul $AO_c HO_b$ este romb, deci $O_c A' \equiv A'O_b$, adică A' este mijlocul segmentului $O_c O_b$. Analog, se arată că B' și C' sunt mijloacele segmentelor $O_a O_c$ și $O_a O_b$.

13) Triunghiul $A''B''C''$ având ca vârfuri punctele unde mediatoarele laturilor triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului ABC este triunghiul ortic al triunghiului lui Carnot.

Demonstrație. Deoarece $BC \parallel O_c O_b$ și $M_a A'' \perp BC$, iar $A'' \in O_b O_c$ (vezi „Cercul lui Euler”), rezultă că $O_a A''$ este înălțime în triunghiul lui Carnot. Analog se arată că $O_b B''$ și $O_c C''$ sunt înălțimi în triunghiul $O_a O_b O_c$.

14) Triunghiul $A'B'C'$ (determinat de punctele euleriene ale triunghiului ABC) și triunghiul $A''B''C''$ (având ca vârfuri punctele unde mediatoarele triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului ABC) sunt două triunghiuri S .

Demonstrație. Vezi „Triunghiuri Ortopolare”.

15) Fie H ortocentrul unui triunghi ABC , $H_a H_b H_c$ triunghiul ortic $\{H_1\} = AH_a \cap H_b H_c$, $\{H_2\} = BH_b \cap H_a H_c$, $\{H_3\} = CH_c \cap H_a H_b$. Dreptele $H_2 H_3$, $H_3 H_1$, $H_1 H_2$ sunt axele radicale dintre cercul lui Euler al triunghiului ABC și respectiv cercurile lui Carnot (C_a) , (C_b) , (C_c) .

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler”.

16) Triunghiul având vârfurile în centrele cercurilor Carnot și triunghiurile având vârfurile în punctele unde înălțimea triunghiului dat intersectează cercul său circumscris sunt omologice, centrul de omologie aparținând acestui cerc circumscris.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Kariya”.

17) Fie I centrul cercului înscris într-un triunghi ABC și $H_a H_b H_c$ triunghiul său ortic. Centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AH_b H_c$, $BH_c H_a$, $CH_a H_b$ sunt centrele cercurilor Carnot corespunzătoare triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie M proiecția lui B pe bisectoarea CI și $\{A_1\} = H_c M \cap AI$.

Avem: $\square AH_c H_b \equiv \square ACB$ și $\square MH_c A \equiv \square MCB$
 $(= \frac{1}{2} m(\square ACB))$ (deoarece patruleterele $H_c H_b CB$ și $H_c MCB$ sunt inscriptibile)

(Fig. 462) de unde rezultă că

$$m(\square AH_c A_1) = m(\square AH_c M) = \frac{1}{2} m(\square AH_c H_b),$$

deci $H_c A_1$ este bisectoarea unghiului $\square AH_c H_b$. Cum AA_1 este bisectoarea unghiului A , rezultă că A_1 este centrul cercului înscris în triunghiul $AH_c H_b$. Dar

$$m(\square A_1 M) = m(\square A_1 A H_c) + m(\square A_1 H_c A) =$$

$$\frac{1}{2} m(\hat{A}) + \frac{1}{2} m(\hat{C}) \text{ și } m(\square M A_1) = m(\square M A) = m(\square FAC) + m(\square FCA) = \frac{1}{2} m(\hat{A}) + \frac{1}{2} m(\hat{C}), \text{ de unde}$$

rezultă că $\square A_1 M \equiv \square M A_1$. Arătăm că punctul M aparține dreptei $C_c C_b$. Fie

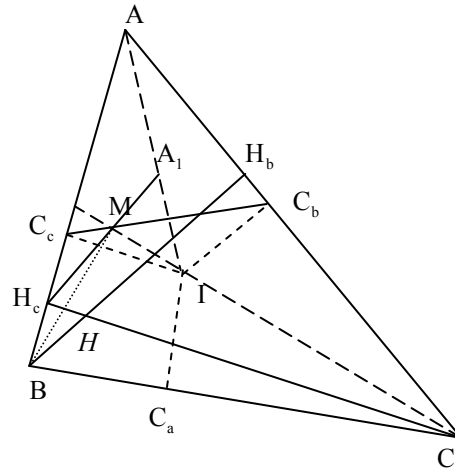


Fig. 462

$\{M_1\} = CI \cap C_c C_b$. Avem: $m(\widehat{BIM_1}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})]$ (ca unghi exterior triunghiului BIC), $m(\widehat{BIM_1}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A})$. Patrulaterul $IC_c AC_b$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{IC_c C_b}) = \frac{1}{2}m(\widehat{A})$, de unde $m(\widehat{BC_c M_1}) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\widehat{A})$. Astfel, $m(\widehat{BC_c M_1}) + m(\widehat{MIB}) = 180^\circ$, adică patrulaterul $BC_c M_1 I$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{BM_1 I}) = m(\widehat{BC_c I}) = 90^\circ$, de unde rezultă că M_1 este proiecția lui B pe bisectoarea C_1 , adică $M_1 \equiv M$. Deoarece $AI \perp C_b C_c$, $M \in C_b C_c$ și triunghiul $MA_1 I$ este isoscel, rezultă că punctele A_1 și I sunt simetrice față de latura $C_c C_b$, deci A_1 este centrul cercului Carnot corespunzător laturii $C_c C_b$ a triunghiului de contact.

18) Fie $O_a O_b O_c$ triunghiul lui Carnot al unui triunghi ABC și $H_a H_b H_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC . Dreptele $O_a H_a, O_b H_b, O_c H_c$ sunt concurente.
Demonstrație. Vezi „Punctul lui Hexyl”.

III.39. Triunghiul lui Lucas²¹³

„Matematica reprezintă în sine o colecție de rezultate, care pot fi aplicate la orice.” - Bertrand Russell²¹⁴

Pe latura BC a triunghiului ABC în exterior se construiește pătratul $BCC_1 B_1$. Fie $\{M\} = AB_1 \cap BC$ și $\{N\} = AC_1 \cap BC$. Fie P și Q punctele de intersecție dintre perpendicularele ridicate din N și M pe latura BC și laturile AC , respectiv AB .

1) Patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

Demonstrație. Din asemănările triunghiurilor AQM și ABB_1 ; APN și ACC_1 ; APN și $AB_1 C_1$ rezultă:

$$\frac{AM}{AB_1} = \frac{MQ}{BB_1} = \frac{AQ}{AB}, \frac{AN}{AC_1} = \frac{NP}{CC_1} = \frac{AP}{AC}, \frac{MN}{B_1 C_1} = \frac{AM}{AB_1} = \frac{AN}{AC_1} \quad (1)$$

de unde $\frac{MQ}{BB_1} = \frac{NP}{CC_1}$ și cum $BB_1 \equiv CC_1$ rezultă

$MQ \equiv NP$. Deoarece $MQ \perp NP$ și $MQ \perp BC, NP \perp BC$ rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi. Atunci, $PQ \perp BC$ și $PQ \equiv MN$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{QP}{BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{QM}{BB_1} \quad (\text{și cum } BC \equiv BB_1), \text{ de unde}$$

$MN \equiv QM$, deci patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

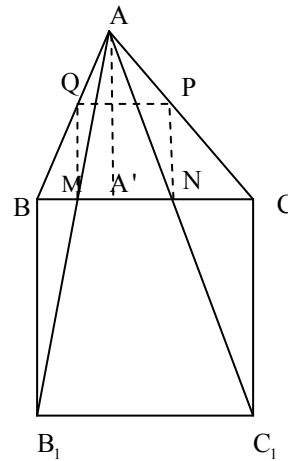


Fig. 463

²¹³ Francois Lucas (1842-1891) – matematician francez, contribuții în teoria numerelor

²¹⁴ Bertrand Russell (1872 - 1970) – filosof, logician și matematician englez, laureat al Premiului Nobel pentru literatură

Observație: Cercul circumscris triunghiului APQ se numește $A - \text{Lucas}$. Analog, se definesc **cercurile** $B - \text{Lucas}$ și $C - \text{Lucas}$. Fie L_A, L_B, L_C centrele cercurilor Lucas. Triunghiul $L_A L_B L_C$ se numește **triunghiul lui Lucas**.

2) Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC și R raza cercului circumscris acestui triunghi. Pătratul $MNPQ$ are latura de lungime egală cu $\frac{a}{1 + \frac{2aR}{bc}}$.

Demonstrație. Fie A' piciorul înălțimii duse din A . Din asemănarea triunghiurilor AQP și ABC rezultă: $\frac{AQ}{c} = \frac{AP}{b} = \frac{QP}{a}$, de unde $AQ = \frac{c}{a}l, AP = \frac{b}{a}l, (PQ = l)$, iar din asemănarea

triunghiurilor BQM și BAA' rezultă $\frac{BQ}{AB} = \frac{QM}{AA'}$, de unde $\frac{c - \frac{c}{a}l}{c} = \frac{l}{h_a}$ și de aici

$$l = \frac{a \cdot h_a}{a + h_a}. \text{ Dar } h_a = \frac{2 \cdot A_{[ABC]}}{a} = \frac{2 \cdot abc}{a \cdot 4R} = \frac{bc}{2R}, \text{ de unde rezultă } l = \frac{a}{1 + \frac{2aR}{bc}}.$$

3) Razele cercurilor $A - \text{Lucas}$, $B - \text{Lucas}$ și $C - \text{Lucas}$ sunt egale cu: $R_A = \frac{R}{1 + \frac{2aR}{bc}}$,

$$R_B = \frac{R}{1 + \frac{2bR}{ac}}, \text{ respectiv } R_C = \frac{R}{1 + \frac{2cR}{ab}}.$$

Demonstrație. Deoarece triunghiurile APQ și ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul A și raportul de omotetie fiind egal cu $\frac{l}{a} = \frac{1}{1 + \frac{2aR}{bc}}$ (conform proprietății

precedente) rezultă că $\frac{R_A}{R} = \frac{l}{a}$, de unde $R_A = \frac{R}{1 + \frac{2aR}{bc}}$. Analog se determină lungimile

celorlalte două raze.

4) Cercul circumscris triunghiului ABC și cercurile lui Lucas sunt tangente interior.

Demonstrație. Deoarece triunghiurile AQP și ABC sunt omotetice, prin omotetia de centru A și raport $\frac{1}{1 + \frac{2aR}{bc}}$

rezultă că cercurile circumscrise acestor două triunghiuri se corespund prin omotetia considerată, deci cercurile sunt tangente interior.

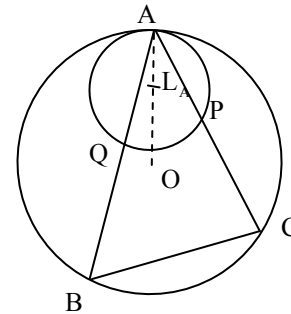


Fig. 464

Observații:

- 1) Raportul de omotetie poate fi considerat și sub forma $\frac{R_A}{R}$.
- 2) Analog se arată că cercurile B – Lucas și C – Lucas sunt tangente interior cercului circumscris triunghiului ABC .

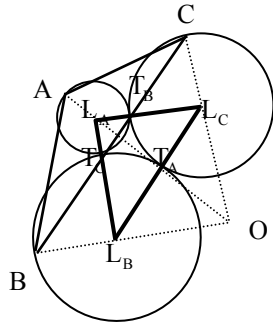


Fig. 465

5) Cercurile lui Lucas sunt tangente două câte două.

Demonstrație. Avem: $OL_B = OB - L_BB = R - R_B$,
 $OL_C = R - R_C$ și $m(\angle BOC) = 2m(\angle BAC)$. Aplicând
 teorema cosinusului în triunghiul $OL_B L_C$ rezultă:

$$L_B L_C^2 = OL_B^2 + OL_C^2 - 2OL_B \cdot OL_C \cdot \cos(\angle L_B OL_C). \quad \text{Cum}$$

$$OL_B = R - \frac{R}{1 + \frac{2bR}{ac}}, \quad OL_C = R - \frac{R}{1 + \frac{2cR}{ab}} \quad \text{și}$$

$$\cos(\angle L_B OL_C) = \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) - 1$$

$$\text{rezultă } L_B L_C = \frac{2R(abc + b^2 R + c^2 R) \cdot a}{(ac + 2bR)(ab + 2cR)} = R_B + R_C, \quad \text{deci}$$

cercurile B – Lucas și C – Lucas sunt tangente. Analog, se arată că cercurile A – Lucas și C – Lucas respectiv B – Lucas și A – Lucas sunt tangente.

6) Laturile triunghiului Lucas au lungimile $R_A + R_B, R_B + R_C, R_C + R_A$.

Demonstrația este o consecință a proprietății precedente.

Fie T_A, T_B, T_C punctele de tangență dintre cercurile lui Lucas. Triunghiul $T_A T_B T_C$ se numește **triunghiul tangențelor Lucas**. Cercul circumscris triunghiului $T_A T_B T_C$ se numește **cercul radical al cercurilor Lucas**.

III.40. Triunghiul lui Fuhrmann

„Dacă cineva vrea să determine cu un cuvânt laconic și expresiv esența matematicii, acela trebuie să spună, că este o știință despre infinit.” - Henri Poincaré²¹⁵

Fie C cercul circumscris triunghiului ABC . **Triunghiul lui Fuhrmann** al triunghiului ABC este triunghiul $F_A F_B F_C$ ale cărui vârfuri sunt simetricele mijloacelor arcelor $\widehat{BC}, \widehat{AC}$ respectiv $\widehat{AB}$, considerate în cercul C , față de laturile triunghiului ABC (Fig. 466). Cercul circumscris triunghiului lui Fuhrmann se numește **cercul lui Fuhrmann**. Centrul cercului lui Fuhrmann (F) se numește **punctul lui Fuhrmann** (F). Fie A', B', C' mijloacele arcelor $\widehat{BC}, \widehat{AC}$, respectiv $\widehat{AB}$ și M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor triunghiului ABC , iar O centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

²¹⁵ Henri Poincaré (1854 -1912) – matematician și fizician francez, contribuții importante în toate ramurile matematicii

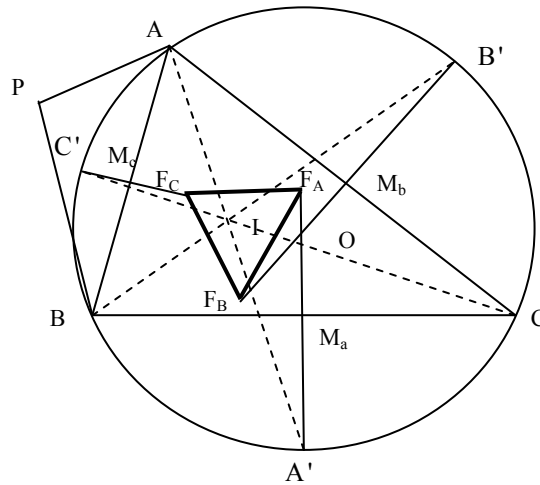


Fig. 466

1) Dreptele $A'F_A, B'F_B, C'F_C$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $OA' \perp BC$ rezultă că și $F_A A' \perp BC$, deci $O \in A'F_A$. Analog $O \in B'F_B$ și $O \in C'F_C$.

2) Triunghiul ABC și triunghiul Fuhrmann $F_A F_B F_C$ al triunghiului ABC sunt ortologice.

Demonstrație. Deoarece $F_A A' \perp BC, F_B B' \perp AC$ și $F_C C' \perp AB$ iar $F_A A', F_B B', F_C C'$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC rezultă că triunghiul $F_A F_B F_C$ este ortologic cu triunghiul ABC .

3) Perpendicularele duse din A, B și C pe laturile $F_B F_C, F_A F_C$ respectiv $F_B F_A$ ale triunghiului Fuhrmann sunt concurente într-un punct P .

Demonstrație. Deoarece relația de ortologie dintre două triunghiuri este simetrică, rezultă (conform proprietății precedente) că triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul Fuhrmann, deci perpendicularele duse din A, B și C pe laturile $F_B F_C, F_A F_C$ respectiv $F_B F_A$ sunt concurente într-un punct P .

4) Cercurile având centrele în vârfurile F_A, F_B, F_C și trec prin punctele B și C, C și A , respectiv A și B sunt concurente în punctul P .

Demonstrație. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Fie $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ cercurile circumscrise triunghiurilor BIC, CIA respectiv AIB , iar $\zeta'_a, \zeta'_b, \zeta'_c$ cercurile având centrele în punctele F_A, F_B, F_C și trec prin punctele B și C, C și A , respectiv A și B (Fig. 467). Conform teoremei lui Catalan, centrele cercurilor $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ sunt mijloacele arcelor $\widehat{BC}, \widehat{AC}$ respectiv $\widehat{AB}$ ale cercului circumscris triunghiului ABC . Cercurile ζ_a și ζ'_a

sunt simetrice față de BC ; ζ_b și ζ'_b sunt simetrice față de CA ; ζ_c și ζ'_c sunt simetrice față de AB . Atunci conform teoremei lui Schoute cercurile $\zeta'_a, \zeta'_b, \zeta'_c$ sunt concurente într-un punct Q , linia centrelor fiind perpendiculară pe axa radicală a cercurilor; rezultă că $F_C F_B, F_A F_C, F_A F_B$ sunt mediatoarele segmentelor AQ, BQ, CQ și conform proprietății (3) rezultă că punctele P și Q coincid, deci cercurile $\zeta'_a, \zeta'_b, \zeta'_c$ sunt concurente în punctul P .

5) Fie I_a centrul cercului A -exînscriș corespunzător triunghiului ABC , I'_a simetricul lui I_a față de BC . Dacă P este punctul de concurență al cercurilor $\zeta'_a, \zeta'_b, \zeta'_c$ (având centrele în vârfurile triunghiului Fuhrmann și trec prin punctele (B, C) , (C, A) respectiv (A, B)), atunci punctele P, A și I_a sunt coliniare.

Demonstrație. Fie A' mijlocul arcului $\widehat{BC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC și I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Punctele A, I, A' și I_a sunt coliniare (vezi „Cercurile exînscrișe”) iar A' este centrul cercului circumscris patrulaterului $BICI_a$ (adică cercul ζ_a (Fig. 467). Cum cercurile

ζ_a și ζ'_a sunt simetrice față de latura BC rezultă că punctul I'_a aparține cercului ζ'_a . Fie H_A și H_C ortocentrele triunghiurilor IBC , respectiv IAB , iar A'' al doilea punct de intersecție dintre cercul ζ'_c și dreapta BC . Conform proprietății prin care simetricele ortocentrului unui triunghi față de laturile acestuia aparțin cercului circumscris triunghiului (vezi „Ortocentrul unui triunghi”) rezultă că simetricul lui H_A față de BC aparține lui ζ_a și deci H_A aparține lui ζ'_a . Analog $H_C \in \zeta'_c$. Evident I este ortocentrul triunghiului $AH_C B$. Simetricul său față de AB aparține cercului ζ'_c . Avem: $\square AH_C B \equiv \square AA'' B$

$\left(= \frac{1}{2} m(\square APB) \right)$ (1), iar unghiurile

$\square AH_C B$ și $\square AIB$ sunt suplementare (I fiind ortocentrul

lui $AH_C B$). Datorită simetriei rezultă $\square I'_a CB \equiv \square BCI_a$, iar în ζ_a avem: $\square BCI_a \equiv \square BII_a$

(2), de unde $\square BCI'_a \equiv \square BII_a$. Cum $m(\square AH_C B) + m(\square AIB) = 180^\circ$ și $m(\square BIA) + m(\square BII_a) = 180^\circ$ rezultă $m(\square AH_C B) = m(\square BII_a)$, adică $\square AH_C B \equiv \square BII_a$ (3).

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă $\square AA'' B \equiv \square BCI'_a$, adică $AA'' \parallel CI'_a$, relație care arată că

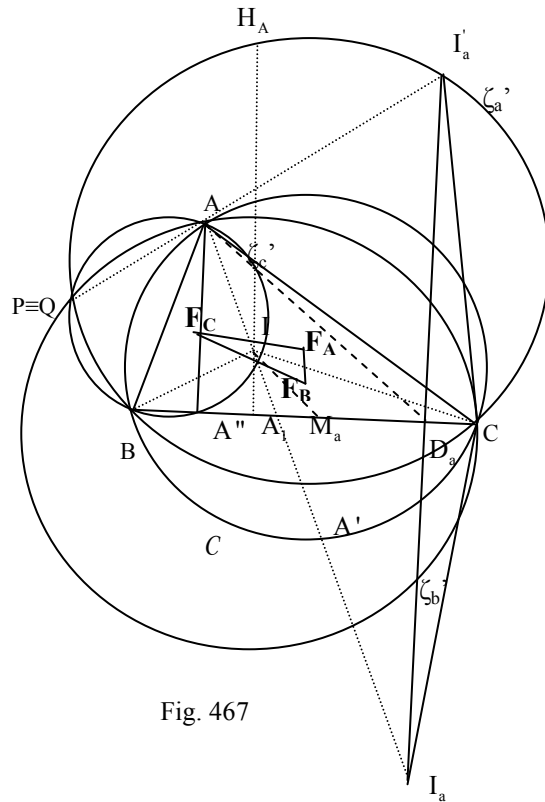


Fig. 467

punctele P , A și I_a' sunt coliniare (deoarece în ζ_c' și ζ_a' avem $m(\angle BPA) = 180^\circ - m(\angle BA''A) = 180^\circ - m(\angle BCI_a) = m(\angle BPI_a')$ și cum A și I_a' se află în același semiplan față de PB rezultă P, A și I_a' coliniare).

Observație: Analog se arată că simetricile I_b' și I_c' ale centrelor cercurilor B - exînscriș, respectiv C - exînscriș față de CA și AB sunt coliniare cu punctele P și B , respectiv P și C .

6) Teorema lui Stevanovic

Ortocentrul triunghiului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Păstrând notațiile de mai sus, fie $\{A_1\} = AI_a \cap BC$, M_a mijlocul laturii BC și $\{D_a\} = I_a I_a' \cap BC$ (Fig. 467). Datorită simetriei față de BC , rezultă că punctele A_1 , F_A și I_a' sunt coliniare. Dar $IM_a \perp AD_a$ (vezi „Punctul lui Gergonne” - teorema lui Poncelet) și $M_a F_A \perp D_a I_a'$. Din reciproca teoremei lui Desargues aplicată triunghiurilor $IF_A M_a$ și $AI_a' D_a$ având centrul de omologie A_1 - rezultă $AI_a' \perp IF_A$. Conform proprietății (3) rezultă $PI_a' \perp F_B F_C$, adică $IF_A \perp F_B F_C$, analog $IF_B \perp F_A F_C$, deci I este ortocentrul triunghiului lui Fuhrmann.

7) Dacă afixul cercului circumscris triunghiului ABC este în originea reperului complex, atunci afixul punctului lui Fuhrmann este egal cu

$$z_F = \frac{z_A(2p-a) + z_B(2p-b) + z_C(2p-c)}{2p}.$$

Demonstrație. Notăm cu z_X afixul punctului X . Afixul centrului cercului A - exînscriș

$$\text{este } z_{I_a} = \frac{c(a+b)z_C + (b-a)[az_A + bz_B]}{(a+b)(b+c-a)} \quad (4) \text{ (vezi „Triunghiul cotangent”)}, \text{ iar afixul}$$

$$\text{centrului cercului înscris în triunghiul } ABC \text{ este } z_I = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c} \quad (2). \text{ Deoarece } A'$$

$$\text{este mijlocul segmentului } II_a \text{ (vezi „Cercurile exînscrișe”) rezultă } z_{A'} = \frac{z_I + z_{I_a}}{2} \quad (3). \text{ Cum}$$

$$M_a \text{ este mijlocul segmentului } A'F_A \text{ rezultă } z_{F_A} = 2z_{M_a} - z_{A'} = z_B + z_C - \frac{z_I + z_{I_a}}{2}. \text{ Analog}$$

se determină afixe punctelor F_B și F_C , de unde rezultă afixul centrului de greutate al

$$\text{triunghiului } F_A F_B F_C: z_{G_F} = \frac{z_{F_A} + z_{F_B} + z_{F_C}}{3} = \frac{z_A(4p-a) + z_B(4p-b) + z_C(4p-c)}{6p}.$$

Deoarece I este ortocentrul triunghiului $F_A F_B F_C$ rezultă $IG_F = 2G_F F$ (unde F este

$$\text{centrul cercului lui Fuhrmann), deci } z_{G_F} = \frac{z_I + 2z_F}{3}, \text{ de unde}$$

$$z_F = \frac{z_A(2p-a) + z_B(2p-b) + z_C(2p-c)}{2p}.$$

8) Centrul cercului lui Fuhrmann corespunzător unui triunghi ABC este mijlocul segmentului HN , unde H și N sunt ortocentrul, respectiv punctul lui Nagel al triunghiului ABC .

Demonstrație.

Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

$$\text{Atunci, } z_H = z_A + z_B + z_C, \quad z_F = \frac{z_A(2p-a) + z_B(2p-b) + z_C(2p-c)}{2p},$$

$$z_N = \frac{z_A(p-a) + z_B(p-b) + z_C(p-c)}{p}. \text{ Deoarece } \frac{z_H + z_N}{2} = z_F \text{ rezultă concluzia.}$$

9) Punctul lui Nagel și ortocentrul unui triunghi ABC aparțin cercului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $|z_H - z_F| = |z_N - z_F| = |z_F - z_{F_A}|$, adică $HF = NF = FF_A$ rezultă că H și N aparțin cercului lui Fuhrmann.

Observație: Punctele H și N sunt diametral opuse în cercul lui Fuhrmann.

10) Raza cercului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC are lungimea egală cu lungimea segmentului OI , unde O și I sunt centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Deoarece $HN \perp OI$ și $HN = 2OI$ (vezi „Punctul lui Nagel”), rezultă

$$R_F = \frac{1}{2}HN = OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

11) Consecință: Patrulaterul $IONF$ este paralelogram.

12) Centrele cercurilor lui Euler ale triunghiului ABC și triunghiului lui Fuhrmann coincid.

Demonstrație. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , deci $z_O = 0$. Atunci, afixul centrului cercului lui Euler al triunghiului

$$ABC \text{ este } z_{O_9} = \frac{z_H + z_O}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}.$$

$$\text{Fuhrmann ste } z_{O_9^F} = \frac{z_I + z_F}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}.$$

13) Consecință: Raza cercului lui Euler a triunghiului lui Fuhrmann este egală cu jumătate din lungimea segmentului OI .

14) Fie $F_A F_B F_C$ triunghiul lui Fuhrmann corespunzător unui triunghi ABC . Cercurile circumscrise triunghiurilor $F_A BC$, $F_B CA$, $F_C AB$, $F_A F_B F_C$ sunt concurente în ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie H_1 simetricul ortocentrului H față de BC (Fig. 468); punctul H_1 aparține cercului circumscris triunghiului ABC . Deoarece patrulaterul $BH F_A C$ și $BH_1 A' C$

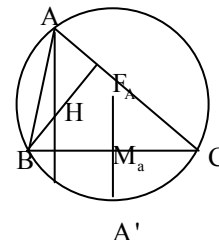


Fig. 468

sunt congruente, iar $BHA'C$ este inscriptibil rezultă că și patrulaterul $BHF_A C$ este inscriptibil, H aparține cercului circumscris triunghiului $F_A BC$. Analog se arată că H aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor $F_B CA$ și $F_C AB$. Cum H aparține și triunghiului $F_A F_B F_C$, rezultă concluzia.

15) Simetricul centrului cercului circumscris unui triunghi ABC față de punctul lui Spieker al triunghiului ABC este punctul lui Furhmann.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Spieker”.

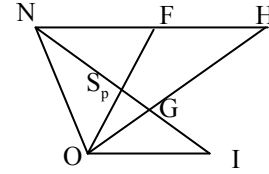


Fig. 469

III.41. Triunghiul lui Lionnet

„Științele matematice, științele naturale și științele umanitare pot fi numite, respectiv și științe supranaturale, științe naturale și științe nenaturale.” - L. D. Landau²¹⁶

1) Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile $A'BC, AB'C, ABC'$ asemenea cu $A'B'C'$. Cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun D .

Demonstrație. Din condiția de asemănare rezultă $m(\sphericalangle BA'C) = m(\sphericalangle BAC)$, $m(\sphericalangle CBA') = m(\sphericalangle CBA)$, $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle AC'B)$. Fie D punctul de intersecție dintre cercurile circumscrise triunghiurilor ABC' și $AB'C$ (Fig. 470). Atunci, $m(\sphericalangle ADB) = 180^\circ - m(\sphericalangle C)$, $m(\sphericalangle ADC) = 180^\circ - m(\sphericalangle B)$
 $m(\sphericalangle BDC) = 360^\circ - [180^\circ - m(\sphericalangle C) + 180^\circ - m(\sphericalangle B)] = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ - m(\sphericalangle A) = 180^\circ - m(\sphericalangle BA'C)$
 deci punctul D aparține cercului circumscris triunghiului $BA'C$.

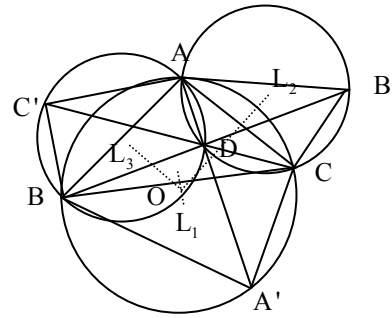


Fig. 470

Fie L_1, L_2, L_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $A'BC, AB'C, ABC'$. Triunghiul $L_1 L_2 L_3$ se numește **triunghiul lui Lionnet** corespunzător triunghiului ABC . Cercul circumscris triunghiului $L_1 L_2 L_3$ se numește **cercul lui Lionnet**.

2) Triunghiurile $A'B'C'$ și $L_1 L_2 L_3$ sunt omologice.

Demonstrație. Deoarece $m(\sphericalangle BDA) = 180^\circ - m(\sphericalangle C)$, $m(\sphericalangle BDA') = m(\sphericalangle BCA') = m(\sphericalangle C)$ rezultă că $m(\sphericalangle BDA) + m(\sphericalangle BDA') = 180^\circ$, deci punctele A, D, A' sunt coliniare. Analog se arată că B, D, B' respectiv C, D, C' sunt coliniare, deci D este centrul de omologie dintre triunghiurile ABC și $A'B'C'$.

²¹⁶L. D. Landau (1908-1968) –fizician rus, laureat al Premiului Nobel pentru Fizică în anul 1962

3) Triunghiurile $A'B'C'$ și $L_1L_2L_3$ sunt ortologice.

Demonstrație. Deoarece AD este axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiurilor $AB'C$ și ABC' rezultă $AD \perp L_2L_3$ deci $AA' \perp L_2L_3$. Analog, $BB' \perp L_1L_3$ și $CC' \perp L_1L_2$, iar cum $AA' \cap BB' \cap CC' = \{D\}$, rezultă că D este un centru de ortologie, celălalt fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

4) Triunghiului lui Lionnet $L_1L_2L_3$ este asemenea cu triunghiul $A'B'C'$.

Demonstrație. Deoarece $BD \perp L_1L_3$, $CD \perp L_1L_2$ rezultă că $m(\angle L_1L_3) = 180^\circ - m(\angle BDC) = m(\angle A'C) = m(\angle A'C') = m(\angle BAC)$, și analog $m(\angle L_2L_3) = m(\angle A'B'C')$, deci triunghiurile $A'B'C'$ și $L_1L_2L_3$ sunt asemenea.

5) Triunghiul lui Lionnet $L_1L_2L_3$ este asemenea cu triunghiul ABC .

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

6) Punctele D și O sunt izogonale în triunghiul lui Lionnet, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece DL_1 și perpendiculara din D pe BC sunt drepte izogonale în raport cu unghiul $\angle BDC$, $(m(\angle L_1DB) = 90^\circ - m(\angle BCD))$, rezultă că DL_1 și L_1O sunt izogonale în raport cu unghiul $\angle L_3L_1L_2$, deoarece $BD \perp L_1L_3$, $CD \perp L_1L_2$.

III.42. Triunghiurile lui Morley²¹⁷

„Arta de a rezolva probleme geometrice seamănă cu trucurile iluzioniștilor – uneori, chiar știind soluția problemei, nu-i clar cum s-ar putea ajunge la ea.” - I. D. Novikov²¹⁸

Teorema lui Morley

Trisectoarele unghiurilor unui triunghi se intersectează în trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Demonstrație. Fie triunghiul ABC și L, M, N intersecțiile trisectoarelor (Fig.471). Avem:

$$m(\angle BAN) = m(\angle NAM) = m(\angle MAC) = \frac{1}{3}m(\angle A)$$

$$m(\angle NBA) = \frac{1}{3}m(\angle B), \quad m(\angle MCA) = \frac{1}{3}m(\angle C).$$

Teorema sinusurilor în triunghiul ANB dă:

$$\frac{AN}{\sin \frac{B}{3}} = \frac{AB}{\sin \frac{A+B}{3}} \quad \text{adică,}$$

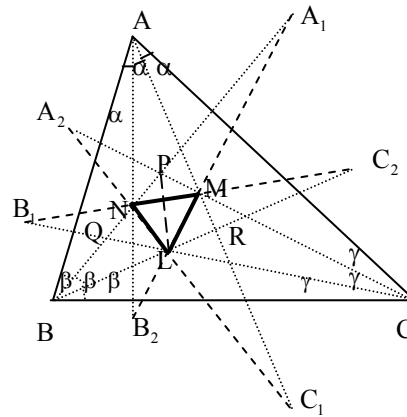


Fig. 471

²¹⁷ Frank Morley (1860-1937) – matematician englez, profesor la Universitatea Johns Hopkins, contribuții în algebră și geometrie

²¹⁸ Igor Dovikov (1935-) – fizician rus

$$AN = \frac{c \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{\pi-C}{3}} = \frac{2R \sin C \sin \frac{B}{3}}{\sin \left(\frac{\pi-C}{3} \right)} = \frac{2R \sin(\pi-C) \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{\pi-C}{3}} = \frac{2R \sin \frac{B}{3} \sin \frac{\pi-C}{3} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\pi-C}{3} \right)}{\sin \frac{\pi-C}{3}} =$$

$$2R \sin \frac{B}{3} \left(3 - 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi-2C}{3} \right) \right) = 2R \sin \frac{B}{3} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi-2C}{3} \right) = 4R \sin \frac{B}{3} \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi-2C}{3} \right) =$$

$$= 4R \sin \frac{B}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi-2C}{3} \right) = 8R \sin \frac{B}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right) = 8R \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right).$$

Analog se obține: $AM = 8R \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3} \right)$. Teorema cosinusurilor în triunghiul

ANM ne dă: $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \frac{A}{3}$ și utilizând relațiile precedente

$$\text{obținem: } MN^2 = 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3} \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3} \right) \cos \frac{A}{3} \right] =$$

$$= 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[\frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi-2C}{3} \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi-2B}{3} \right)}{2} - \cos \frac{A}{3} \left(\cos \frac{\pi-B-C}{3} + \cos \frac{B-C}{3} \right) \right] =$$

$$= 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[1 + \cos \frac{\pi-B-C}{3} + \cos \frac{B-C}{3} - \cos \frac{A}{3} \left(\cos \frac{\pi-B-C}{3} + \cos \frac{B-C}{3} \right) \right] =$$

$$= 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left(1 + \cos \frac{A}{3} \cos \frac{B-C}{3} - \cos^2 \frac{A}{3} - \cos \frac{A}{3} \cos \frac{B-C}{3} \right) =$$

$$64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \sin^2 \frac{A}{3}. \text{ Așadar, } MN = 8R \sin \frac{A}{3} \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3}. \text{ Simetria în } A, B, C \text{ a}$$

relației precedente asigură valabilitatea enunțului.

Observație: Triunghiul LMN determinat de trisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC se numește **triunghiul interior al lui Morley**.

Fie NML triunghiul lui Morley al triunghiului ABC și $\{A_1\} = LM \cap NB, \{A_2\} = NL \cap MC, \{B_1\} = MN \cap LC, \{B_2\} = LM \cap NA, \{C_1\} = NL \cap MA, \{C_2\} = MN \cap LB, \{P\} = BN \cap MC, \{Q\} = CL \cap NA, \{R\} = AM \cap LB, \{A'\} = BB_1 \cap CC_2, \{B'\} = CC_1 \cap AA_2, \{C'\} = AA_1 \cap BB_2$, iar razele cercului circumscris triunghiurilor $A'BC, AB'C, ABC'$ le vom nota cu R'_1, R'_2, R'_3 . Fie $m(\sphericalangle BAP) = \alpha, m(\sphericalangle LBC) = \beta, m(\sphericalangle MCA) = \gamma$ (Fig. 471).

1) Pentagonoanele $AA_1MNA_2, BB_1NLB_2, CC_1LMC_2$ sunt inscripibile.

Demonstrație. Deoarece $MN \perp PL$ și PL este bisectoare în triunghiul BPC avem $m(\sphericalangle BPC) = 60^\circ + 2\alpha$ și de aici $m(\sphericalangle LPC) = 30^\circ + \alpha$. Dar $m(\sphericalangle PA_1L) = m(\sphericalangle NPL) - m(\sphericalangle PLA_1) = \alpha$ și analog $m(\sphericalangle PA_1L) = \alpha$, adică pentagonul AA_1MNA_2 este inscriptibil. Analog, se arată că pentagoanele BB_1NLB_2 respectiv CC_1LMC_2 sunt inscriptibile.

2) Fie R_1', R_2', R_3' razele cercurilor circumscrise pentagoanelor $AA_1MNA_2, BB_1NLB_2, CC_1LMC_2$. Atunci, $a \cdot \frac{R_1'}{R_1} = b \cdot \frac{R_2'}{R_2} = c \cdot \frac{R_3'}{R_3}$ (unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC).

Demonstrație. Avem: $m(\sphericalangle B_1BC) = m(\sphericalangle B_1BL) + m(\sphericalangle LBC) = 60^\circ + \beta$ (deoarece $\sphericalangle B_1BL = \sphericalangle LNM$, $BLNB_1$ fiind patrulater inscriptibil). Analog, $m(\sphericalangle C_2CB) = 60^\circ + \gamma$, de unde $m(\sphericalangle BA'C) = 180^\circ - (60^\circ + \beta) - (60^\circ + \gamma) = \alpha$. Teorema sinusurilor aplicată triunghiurilor $A'BC$, respectiv ANM ne dă: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R_1', \frac{NM}{\sin \alpha} = 2R_1'$, de unde $\frac{R_1'}{R_1} = \frac{NM}{a}$, adică $NM = a \cdot \frac{R_1'}{R_1}$. Analog, $NL = b \cdot \frac{R_2'}{R_2}, LM = c \cdot \frac{R_3'}{R_3}$ și cum $NM = NM = LM$ rezultă concluzia.

3) Perechile de triunghiuri $(A'BC, ANM), (B'CA, BLN), (C'AB, CMN)$ sunt respectiv asemenea.

Demonstrație. Avem $m(\sphericalangle B'AC) = m(\sphericalangle NAM) = \alpha, m(\sphericalangle LPC) = 30^\circ + \alpha$. Atunci, $m(\sphericalangle ANM) = m(\sphericalangle NQM) + m(\sphericalangle NMQ) = 60^\circ + \beta = m(\sphericalangle B_1BC)$, deci triunghiurile $A'BC$ și ANM sunt asemenea. Analog se arată și celelalte două asemănări.

4) Triunghiurile PQR și LMN sunt omologice.

Demonstrație: Dreptele PL, MQ , respectiv NR sunt mediatoarele laturilor triunghiului echilateral LMN , deci sunt concurente, ceea ce arată că triunghiurile PQR și LMN sunt omologice.

5) Laturile triunghiului ABC și ale triunghiului Morley corespunzător LMN , sunt antiparalele în raport cu unghiurile sub care se văd laturile respective ale triunghiului ABC din vârfurile omoloage ale triunghiului LMN .

Demonstrație. Avem $m(\sphericalangle NB_1L) = m(\sphericalangle LBC) = \beta$, deci patrulaterul BB_1C_2C este inscriptibil, adică dreptele B_1C_2, BC sunt antiparalele în raport cu unghiul $\sphericalangle BLC$. Analog se arată că C_1A_2 este antiparalelă cu CA față de unghiul $\sphericalangle CMA$ și A_1B_2 este antiparalelă cu AB față de unghiul $\sphericalangle ANB$.

6) Dacă R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , atunci lungimea laturii triunghiului lui Morley corespunzător este egală cu $8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

Demonstrație. Soluția 1. O primă demonstrație rezultă chiar din teorema lui Morley.

Soluția 2. Avem $m(\angle BNL) = 60^\circ + \alpha, m(\angle BLC) = 120^\circ + \alpha$, de unde $\frac{NL}{\sin \beta} = \frac{BL}{\sin \gamma}$,
 $\frac{BL}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin(120^\circ + \alpha)} = \frac{2R \sin 3\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)}$, deci: $NL = \frac{2R \sin 3\alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)} =$
 $\frac{4R \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \beta \sin \gamma}{\cos 2\alpha - \cos 120^\circ}$, de unde rezultă că $NL = 8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

7) Trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi ABC determină un triunghi echilateral.

Demonstrație.

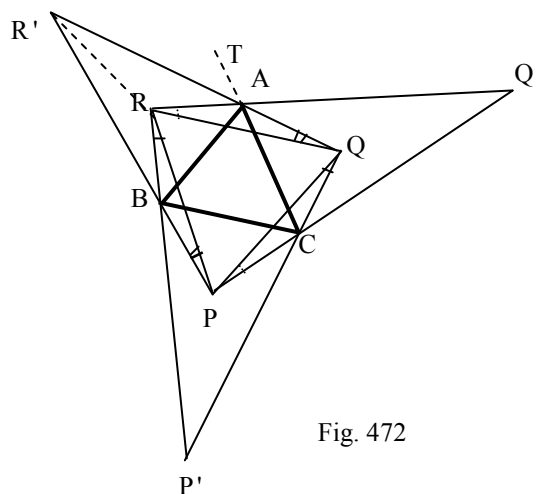


Fig. 472

Vom demonstra teorema considerând următoarele cazuri:

a) triunghiul ABC este ascuțitunghic. Pe laturile triunghiului echilateral $P'QR$ construim triunghiurile isoscele $P'QR, Q'RP, R'PQ$ având unghiurile de la bază de măsură $60^\circ + \alpha, 60^\circ + \beta$ respectiv $60^\circ + \gamma$ astfel încât $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ și $\alpha < 30^\circ, \beta < 30^\circ, \gamma < 30^\circ$. Intersecțiile laturilor triunghiurilor $P'QR, Q'RP, R'PQ$ determină vârfurile unui triunghi ABC (Fig. 472). Arătăm că laturile celor trei triunghiuri isoscele sunt trisectoarele exterioare ale unghiurilor triunghiului ABC . Avem:

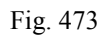
$$m(\angle PR'Q) = 180^\circ - (120^\circ + 2\gamma) = 60^\circ - 2\gamma, \text{ de unde rezultă că } \frac{1}{2}m(\angle PR'Q) = 30^\circ - \gamma;$$

$$m(\angle ARB) = 60^\circ + \alpha + \beta = 120^\circ - \gamma = 90^\circ + (30^\circ - \gamma) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle BR'A). \text{ Datorită simetriei și}$$

a ultimului rezultat avem că R este centrul cercului înscris în triunghiul $AR'B$. Analog, se arată că Q și P sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AQ'C$ și $BP'C$. Atunci, $\angle BAR \equiv \angle RAB' \equiv \angle R'AT$, adică RA și $R'A$ sunt trisectoarele exterioare ale unghiului $\angle BAC$.

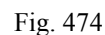
$$\text{Observații: Avem: } m(\angle R'RQ) = 180^\circ - \frac{1}{2}m(\angle PR'Q) - \gamma = 180^\circ - (30^\circ - \gamma) - \gamma = 150^\circ,$$

b) Fie triunghiul echilateral PQR . Unghiurile de la baza triunghiurilor isoscele satisfac



relațiile: $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ, \alpha = 30^\circ$. Triunghiul $BP'C$ considerăm că are vârful P' la infinit (Fig. 473). Avem : $m(\sphericalangle BPC) = 60^\circ + \alpha + \beta = 90^\circ = 90^\circ + \frac{1}{2} m(\sphericalangle BP'C)$ (unde $m(\sphericalangle BP'C) = 0^\circ$), relație care arată că P este centrul cercului înscris în triunghiul $BP'C$. Analog ca în cazul precedent se arată că R și Q sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AR'B$ respectiv $AQ'C$. Deoarece $A = 3\alpha = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$ rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Pe laturile triunghiului echilateral PQR construim triunghiurile isoscele $PQ'R, Q'RP, R'PQ$ care au unghiurile de la bază de măsuri $120^\circ - \alpha, 60^\circ + \beta, 60^\circ + \gamma$, astfel încât $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ, \alpha > 30^\circ, \beta + \gamma < 30^\circ$ (Fig. 474). Avem: $m(\sphericalangle RP'Q) = 2\alpha - 60^\circ$,



$$\frac{1}{2}m(\angle RP'Q) = \alpha - 30^\circ, \quad m(\angle BPC) = \gamma + 60^\circ + \beta = 120^\circ - \alpha = 90^\circ - (\alpha - 30^\circ) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle BP'C)$$

Ultima ecuație arată că punctul P este centrul cercului exînscriș corespunzător punctului P' al triunghiului $BP'C$. Deci, laturile triunghiurilor isoscele sunt trisectoarele unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC .

Observație: Triunghiul PQR determinat de trisectoarele exterioare ale triunghiului ABC se numește **triunghiul Morley exterior**.

III.43. Triunghiul lui Grebe

„Două linii paralele se întâlnesc la infinit – cred și ele în aceasta.” - S.Lec²¹⁹

Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior pătratele $BCA_C A_B$, $ACB_C B_A$ și $ABC_B C_A$. Fie $\{A'\} = B_C B_A \cap C_A C_B$, $\{B'\} = C_A C_B \cap A_B A_C$ și $\{C'\} = A_B A_C \cap B_A B_C$. Triunghiul $A'B'C'$ se numește **triunghiul lui Grebe** (Fig. 475).

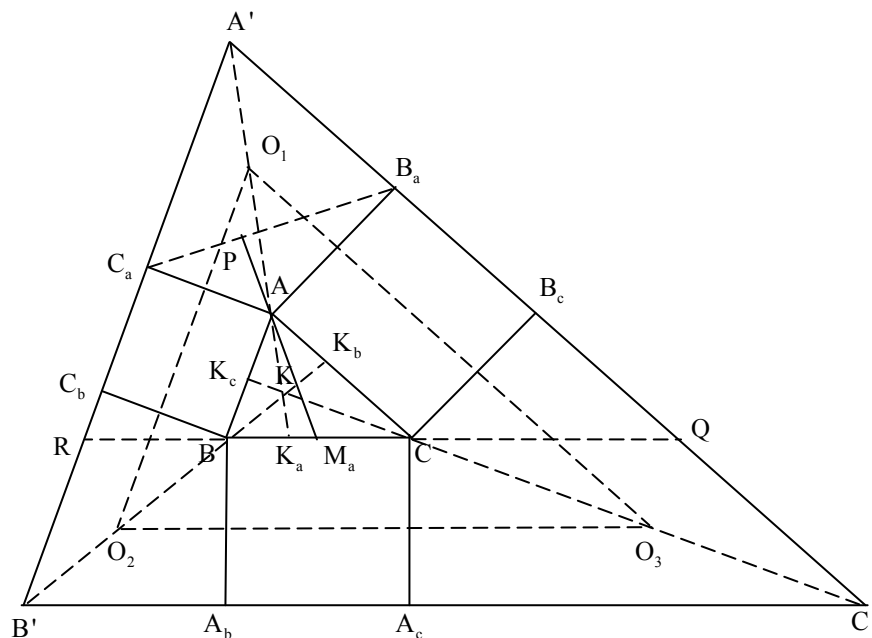


Fig. 475

²¹⁹ Stanislaw Lec (1909-1966) – poet polonez

1) Dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie M_a mijlocul laturii BC , $\{P\} = AM_a \cap B_A C_A$ și $\{K_a\} = AA' \cap BC$. Este cunoscut faptul că $AM_a \perp B_A C_A$ (vezi „Triunghiurile Vecten”). Patrulaterul $AB_A A' C_A$ fiind inscriptibil (deoarece $m(\angle AB_A A') + m(\angle AC_A A') = 180^\circ$) rezultă $\angle AA' C_A \equiv \angle C_A B_A A$ (1). Cum $AB \parallel A' B'$ rezultă $\angle BAK_a \equiv \angle B' A' A \equiv \angle C_A A' A$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\angle AB_A C_A \equiv \angle BAK_a$ (3). În triunghiul APB_A avem: $m(\angle PAA') + m(\angle A' AB_A) + m(\angle AB_A P) = 90^\circ$ (4). Din $\angle K_a AM_a \equiv \angle PAA'$ (5) (unghiuri opuse la vârf) și $m(\angle B_A AC) = 90^\circ$ rezultă $m(\angle A' AB_A) + m(\angle K_a AM_a) + m(\angle M_a AC) = 90^\circ$ (6). Din relațiile (4), (5) și (6) rezultă $m(\angle AB_A C_A) \equiv m(\angle M_a AC)$, care împreună cu relația (3) dă $m(\angle BAK_a) = m(\angle M_a AC)$, relație care arată că AK_a este simediană în triunghiul ABC . Deci, dreapta AA' trece prin punctul K al lui Lemoine al triunghiului ABC . Analog se arată că dreptele BB' și CC' trec prin punctul K .

2) Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $AB \parallel A' B'$, $BC \parallel B' C'$ și $AC \parallel A' C'$ rezultă că triunghiurile ABC și $A' B' C'$ și cum $AA' \cap BB' \cap CC' = \{K\}$ rezultă că triunghiul ABC și triunghiul lui Grebe sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

3) Consecință: Centrul cercului circumscris triunghiului Grebe aparține axei Brocard a triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece triunghiurile ABC și $A' B' C'$ sunt omotetice, rezultă că prin omotetia considerată cercurile lor circumscrise se corespund, deci centrul cercului circumscris triunghiului Grebe este coliniar cu centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC și cu centrul omotetiei, punctul lui Lemoine (K). Cu alte cuvinte, centrul cercului circumscris triunghiului Grebe aparține axei Brocard OK a triunghiului ABC .

4) Fie O_1, O_2, O_3 centrele circumscrise triunghiurilor $AB_A C_A$, $BC_B A_B$, respectiv $CA_C B_C$. Triunghiurile $O_1 O_2 O_3$ și ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece A aparține cercului circumscris triunghiului $AB_A C_A$ și $m(\angle AB_A A')$ rezultă că O_1 se află la mijlocul segmentului AA' . Analog, O_2 și O_3 sunt mijloacele segmentelor BB' , respectiv CC' . Astfel, $O_1 O_2$, $O_2 O_3$ și $O_3 O_1$ sunt linii mijlocii în trapezele $ABB' A'$, $BCC' B'$ respectiv $ACC' A'$, deci $O_1 O_2 \parallel AB$, $O_2 O_3 \parallel BC$ și $O_3 O_1 \parallel AC$, iar cum $O_1 A \cap O_2 B \cap O_3 C = \{K\}$ (vezi proprietatea (2)) rezultă că triunghiurile $O_1 O_2 O_3$ și ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul lui Lemoine K .

5) Consecință: Triunghiurile $O_1 O_2 O_3$ și triunghiul lui Grebe al triunghiului ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Demonstrația rezultă din teoremele 2) și 4), ținând cont că relația de omotetie este tranzitivă.

6) Triunghiul lui Grebe $A'B'C'$ și triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC sunt omologice.

Demonstrație. Fie $\{A''\} = A'H_a \cap B'C'$, $\{B''\} = B'H_b \cap A'C'$, $\{C''\} = C'H_c \cap A'B'$,

$$\{R\} = BC \cap A'B', \{Q\} = BC \cap A'C'. \text{ Avem: } \frac{A''B'}{C'A''} = \frac{RH_a}{H_aQ} = \frac{RB+BH_a}{H_aC+CQ} = \frac{\frac{c}{\sin B} + c \cos B}{b \cos C + \frac{b}{\sin C}} =$$

$$\frac{c}{b} \cdot \frac{1 + \sin B \cdot \cos B}{1 + \sin C \cdot \cos C} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{2 + \sin 2B}{2 + \sin 2C}. \text{ Analog se arată că: } \frac{B''C'}{A'B''} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{2 + \sin 2C}{2 + \sin 2A}$$

$$\text{și } \frac{C''A'}{B'C''} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{2 + \sin 2A}{2 + \sin 2B}. \text{ Atunci, } \frac{A''B'}{C'A''} \cdot \frac{B''C'}{A'B''} \cdot \frac{C''A'}{B'C''} = 1 \text{ și din reciproca teoremei lui}$$

Ceva rezultă că dreptele $A'H_a, B'H_b, C'H_c$ sunt concurente, deci triunghiurile $A'B'C'$ și $H_aH_bH_c$ sunt omologice.

III.44. Triunghiul lui Malfatti²²⁰

„Este suficient să arăți, că un lucru oarecare este imposibil, că îndată se va găsi matematicianul care-l va face.” - W. W. Sawyer²²¹

Trei cercuri aflate în interiorul unui triunghi ABC astfel încât fiecare este tangent la celelalte două și la două laturi ale triunghiului se numesc **cercuri Malfatti**. Fie $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ centrele cercurilor Malfatti și T_A, T_B, T_C punctele de tangență dintre cercurile Malfatti (Fig. 476). Triunghiul $\Gamma_A\Gamma_B\Gamma_C$ se numește **triunghiul Malfatti**.

1) Dacă r_1, r_2, r_3 sunt razele cercurilor Malfatti, atunci laturile triunghiului Malfatti au lungimile $r_1 + r_2, r_2 + r_3, r_3 + r_1$.

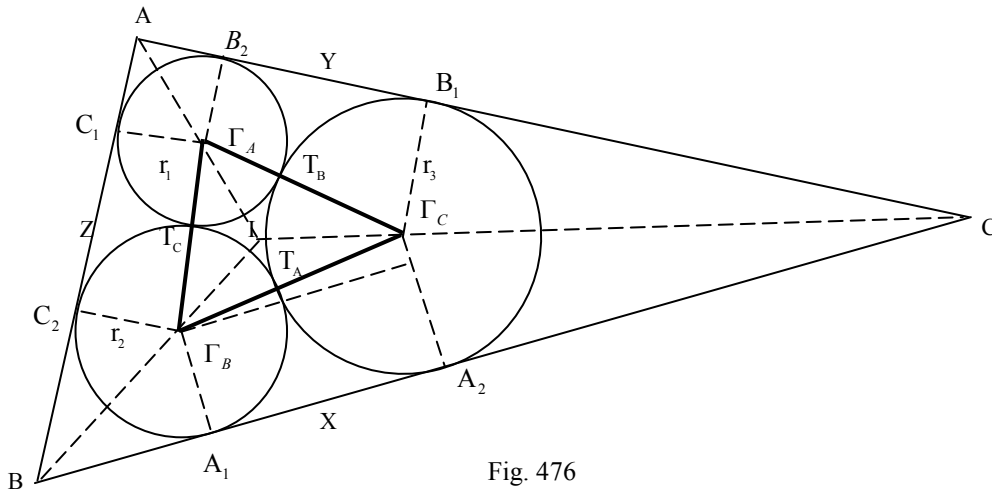


Fig. 476

²²⁰ Gian Francesco Malfatti (1731-1806) – matematician italian, profesor la Universitatea din Ferrara, contribuții în geometrie, algebră și teoria probabilităților

²²¹ Warwick Sawyer (1911-) – matematician englez, profesor la Universitatea din Toronto.

2) Dreptele $A\Gamma_A, B\Gamma_B, C\Gamma_C$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece cercurile sunt tangente la câte două laturi ale triunghiului rezultă că dreptele $A\Gamma_A, B\Gamma_B, C\Gamma_C$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC , deci sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

3) Dreptele $\Gamma_A T_A, \Gamma_B T_B, \Gamma_C T_C$ sunt concurente.

Demonstrație. Deoarece $\frac{T_A \Gamma_B}{T_A \Gamma_C} \cdot \frac{T_B \Gamma_C}{T_B \Gamma_A} \cdot \frac{T_C \Gamma_A}{T_C \Gamma_B} = \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1$, rezultă din reciproca teoremei lui Ceva că dreptele $\Gamma_A T_A, \Gamma_B T_B, \Gamma_C T_C$ sunt concurente.

4) Razele cercurilor Malfatti au lungimile: $r_1 = \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}} \cdot \frac{r}{2},$

$$r_2 = \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4}} \cdot \frac{r}{2}, \quad r_3 = \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4}} \cdot \frac{r}{2}.$$

Demonstrație. Fie $A_1 A_2 = x, B_1 B_2 = y, C_1 C_2 = z$. Din trapezul dreptunghic $\Gamma_B A_1 A_2 \Gamma_C$ rezultă $x^2 + (r_3 - r_2)^2 = (r_3 + r_2)^2$, de unde $x^2 = 4r_2 r_3$ și analog $y^2 = 4r_1 r_3, z^2 = 4r_1 r_2$, iar de aici $r_1 = \frac{yz}{2x}, r_2 = \frac{xz}{2y}, r_3 = \frac{xy}{2z}$. Fie C_a, C_b, C_c punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA , respectiv AB . Din $x + y + z = 2(A_1 C_a + B_1 C_b + C_1 C_c)$ și $B_1 C_a + C_1 C_c = B_1 C_b + C_b B_2 = y$, rezultă

$$A_1 C_a = \frac{x - y + z}{2}. \text{ Fie } P \text{ proiecția}$$

punctului Γ_B pe IC_a . Din triunghiul dreptunghic $IP\Gamma_B$ rezultă :

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{2(r - r_2)}{x - y + z} = \frac{2ry - xz}{y(x - y + z)} \quad \text{Analog}$$

se obțin egalitățile:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{2rx - yz}{x(-x + y + z)} \quad \text{și}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{2rz - xy}{z(x + y - z)}. \quad \text{Folosind relațiile precedente și egalitatea}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1 \quad \text{obținem: } 2r^2(x + y + z) - 2r(xy + yz + zx) + xyz = 0$$

$$\text{sau } \frac{2rx - yz}{-x + y + z} = \frac{2r(x - r)}{x(2r - x)}, \text{ de unde } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{2r(x - r)}{x(2r - x)}. \text{ Din egalitatea precedentă rezultă}$$

$$\text{ecuația } x^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} + 2r \left(1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) \cdot x - 2r^2 = 0 \text{ care are singura soluție acceptabilă:}$$

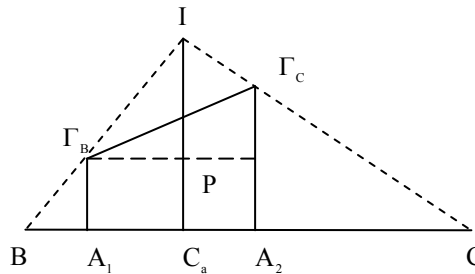


Fig. 477

$x = r \left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4} \right)$. Analog, $y = r \left(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4} \right)$ și $z = r \left(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4} \right)$. Din relațiile de mai sus rezultă: $r_1 = \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4} \right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}} \cdot \frac{r}{2}$, $r_2 = \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4} \right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4}} \cdot \frac{r}{2}$, $r_3 = \frac{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4} \right)}{1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4}} \cdot \frac{r}{2}$.

5) Dacă r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC ,

atunci: $r_a - r_1 = \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}}}{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}} \right) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_2} \right)}$, $r_b - r_2 = \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}}}{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}} \right) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}$, $r_c - r_3 = \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}}{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}} \right) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}} \right)}$.

Demonstrație. Fie $\operatorname{tg} \frac{A}{4} = t_1$, $\operatorname{tg} \frac{B}{4} = t_2$, $\operatorname{tg} \frac{C}{4} = t_3$. Din $\operatorname{tg} \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} \right) = 1$ rezultă $1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_1 t_2 - t_2 t_3 - t_3 t_1 + t_1 t_2 t_3 = 0$, care împreună cu expresiile razelor scrise în aplicația precedentă ne dau: $\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}} = \frac{t_1}{1 + t_1} \cdot \frac{2}{r}$ (*) și analoagele. Dar,

$$r_a = \frac{p}{p-a} \cdot r = \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \cdot r = \frac{(1-t_2^2)(1-t_3^2)}{4t_2 t_3} \cdot r, \text{ de unde se obține egalitatea}$$

$$r_a - r_1 = (1+t_2)(1+t_3) \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{2t_1}{2t_2 t_3 (1+t_1)} = \frac{t_1}{1+t_1} \cdot \frac{t_2}{1+t_2} \cdot \frac{t_3}{1+t_3} \cdot \frac{r}{2} \text{ și utilizând relațiile (*) rezultă concluzia.}$$

6) Raza cercului înscris în triunghiul ABC în funcție de razele cercurilor Malfatti este

egală cu: $r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$.

Demonstrație. Din expresiile razelor r_1, r_2, r_3 rezultă: $\operatorname{tg} \frac{A}{4} = \frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r} - 1$, $\operatorname{tg} \frac{B}{4} = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}}{r} - 1$,

$$\operatorname{tg} \frac{C}{4} = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} - 1. \text{ Ținând seama de egalitatea } \operatorname{tg} \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{4} \right) \text{ rezultă}$$

$$\sum \operatorname{tg} \frac{A}{4} + \sum \operatorname{tg} \frac{A}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{4} = 1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{4} \text{ adică}$$

$$\sum \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} - 1 \right) + \sum \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_3}}{r} - 1 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r} - 1 \right) = 1 + \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} - 1 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r} - 1 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_3}}{r} - 1 \right), \text{ deci:}$$

$$\frac{2r_1 r_2 r_3}{r^2} - \frac{2}{r} \sqrt{r_1 r_2 r_3} (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) + \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1} = 0 \text{ de unde obținem}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \pm \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}. \text{ Deoarece } \operatorname{tg} \frac{A}{4} = \frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r} - 1, \text{ atunci}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{4} = \frac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \pm \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}{\sqrt{r}} \text{ și deoarece } \operatorname{tg} \frac{A}{4} \leq 1 \text{ rezultă } \operatorname{tg} \frac{A}{4} = \frac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1}} \text{ și}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}.$$

7) Fie X, Y și Z mijloacele segmentelor A_1A_2, B_1B_2 , respectiv C_1C_2 . Dreptele AX, BY, CZ sunt concurente.

Demonstrație.

$$\text{Avem: } BX = \frac{1}{2}(a - BA_1 + A_2C) = \frac{1}{2} \left[a + \frac{r_2}{r}(p-b) - \frac{r_3}{r}(p-c) \right] = \frac{1}{2}(a + IB - IC) \text{ sau}$$

$$BX = \frac{1}{2} \left(2R \sin A + \frac{r}{\sin \frac{B}{2}} - \frac{r}{\sin \frac{C}{2}} \right) = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{4} \sin \frac{C}{4} \cos \frac{B+C}{4}. \text{ Procedând analog se}$$

$$\text{obține: } XC = \frac{1}{2}(a - BA_1 + A_2C) = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{4} \cos \frac{B+C}{4}, \text{ de unde}$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\cos \frac{B}{4} \sin \frac{C}{4}}{\sin \frac{B}{4} \cos \frac{C}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{4}}{\operatorname{tg} \frac{B}{4}}. \text{ Analog se arată că } \frac{CY}{YA} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{4}}{\operatorname{tg} \frac{C}{4}} \text{ și } \frac{AZ}{ZB} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B}{4}}{\operatorname{tg} \frac{A}{4}}. \text{ Deoarece}$$

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1, \text{ din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele } AX, BY, CZ \text{ sunt concurente.}$$

8) Dacă X, Y și Z sunt mijloacele segmentelor A_1A_2, B_1B_2 , respectiv C_1C_2 atunci dreptele $T_A X, T_B Y$ și $T_C Z$ sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghiul lui Malfatti.

Demonstrație. Tangenta comună cercurilor $\mathcal{C}(\Gamma_B, r_2)$ și $\mathcal{C}(\Gamma_C, r_3)$ trece prin mijlocul segmentului A_1A_2 (adică prin punctul X) și totodată prin centrul cercului înscris I_μ în triunghiul lui Malfatti, deoarece $I_\mu T_A \equiv I_\mu T_B \equiv I_\mu T_C$.

Observații:

- 1) Triunghiul $T_A T_B T_C$ este triunghiul de contact al triunghiului lui Malfatti.
- 2) Din proprietatea (3) rezultă că dreptele $\Gamma_A T_A, \Gamma_B T_B, \Gamma_C T_C$ sunt concurente în punctul lui Gergonne al triunghiului lui Malfatti.
- 3) Punctul I_μ este centrul radical al cercurilor lui Malfatti.

9) Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC sunt adevărate relațiile:

$$\overrightarrow{M\Gamma_A} = \frac{r_a - r_1}{r_a} \overrightarrow{MA} + \frac{r_1}{r_a} \overrightarrow{MI_a}, \quad \overrightarrow{M\Gamma_B} = \frac{r_b - r_2}{r_b} \overrightarrow{MB} + \frac{r_2}{r_b} \overrightarrow{MI_b}, \quad \overrightarrow{M\Gamma_C} = \frac{r_c - r_3}{r_c} \overrightarrow{MC} + \frac{r_3}{r_c} \overrightarrow{MI_c},$$

(unde I_a, I_b, I_c sunt centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC și r_a, r_b , respectiv r_c razele lor).

Demonstrație. Avem: $\frac{A\Gamma_A}{AI_a} = \frac{r_1}{r_a}$, de unde $\frac{A\Gamma_A}{\Gamma_A I_a} = \frac{r_1}{r_a - r_1}$, deci

$$\overrightarrow{M\Gamma_A} = \frac{r_a - r_1}{r_a} \overrightarrow{MA} + \frac{r_1}{r_a} \overrightarrow{MI_a}. \text{ Analog se arată celelalte egalități.}$$

Observație: Ținând cont că $r_a = \frac{rp}{p-a}$ putem scrie $\frac{1}{r_1} \overrightarrow{M\Gamma_A} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) \overrightarrow{MA} + \frac{p-a}{rp} \overrightarrow{MI_a}$.

10) Coordonatele baricentrice absolute ale centrelor cercurilor lui Malfatti corespunzătoare triunghiului ABC sunt:

$$\Gamma_A \left(2rp \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) - a; b; c \right), \Gamma_B \left(a; 2rp \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} \right) - b; c \right), \text{ respectiv}$$

$$\Gamma_C \left(a; b; 2rp \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right) - c \right).$$

Demonstrație. Deoarece coordonatele baricentrice absolute ale centrului cercului A – exînscriș sunt $I_a \left(-\frac{a}{2(p-a)}; \frac{b}{2(p-a)}; \frac{c}{2(p-a)} \right)$ rezultă că pentru orice punct M este adevărată relația:

$$\frac{1}{r_1} \cdot \overrightarrow{M\Gamma_A} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) \overrightarrow{MA} + \frac{p-a}{rp} \left[\frac{-a}{2(p-a)} \overrightarrow{MA} + \frac{b}{2(p-a)} \overrightarrow{MB} + \frac{c}{2(p-a)} \overrightarrow{MC} \right] \text{ sau}$$

$$\frac{2rp}{r_1} \overrightarrow{M\Gamma_A} = \left[2rp \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) - a \right] \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC}, \text{ de unde rezultă concluzia.}$$

11) Coordonatele baricentrice absolute ale punctelor de tangență dintre cercurile lui

Malfatti sunt: $T_A \left(\frac{a}{rp}; \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b}; \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right), T_B \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a}; \frac{b}{rp}; \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right), \text{ respectiv}$

$$T_C \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a}; \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b}; \frac{c}{rp} \right).$$

Demonstrație. Deoarece $\frac{\Gamma_B \Gamma_A}{\Gamma_A \Gamma_C} = \frac{r_2}{r_3}$ rezultă că pentru orice punct M din planul triunghiului

ABC avem: $\overrightarrow{M\Gamma_A} = \frac{r_3 \overrightarrow{M\Gamma_B} + r_2 \overrightarrow{M\Gamma_C}}{r_2 + r_3}$ sau ținând cont de proprietatea precedentă:

$$\frac{(r_2 + r_3)}{r_2 r_b} \overrightarrow{M\Gamma_A} = \frac{a}{rp} \overrightarrow{MA} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} \right) \overrightarrow{MB} + \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right) \overrightarrow{MC} \text{ de unde rezultă concluzia.}$$

12) Dreptele AT_A, BT_B, CT_C sunt concurente.

Demonstrație. Ecuația dreptei AT_A în coordonate baricentrice este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{r_p} & \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} & \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } y\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c}\right) - z\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b}\right) = 0. \text{ Analog ecuațiile dreptelor}$$

$$BT_B \text{ și } CT_C \text{ sunt: } x\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a}\right) - z\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c}\right) = 0 \text{ respectiv } x\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b}\right) - y\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a}\right) = 0.$$

$$\text{Deoarece } \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} & \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} \\ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} & 0 & \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \\ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} & -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_a} & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ rezultă că dreptele } AT_A, BT_B \text{ și } CT_C \text{ sunt}$$

concurente.

Observații:

- 1) Punctul de concurență al dreptelor AT_A, BT_B, CT_C se numește **primul punct al lui Malfatti** (μ_1).
- 2) Triunghiurile ABC și $T_A T_B T_C$ sunt omologice, centrul de omologie fiind primul punct al lui Malfatti.

13) Dreptele $I_a T_a, I_b T_b, I_c T_c$ sunt concurente.

Demonstrație. Ținem cont de coordonatele baricentrice ale centrelor cercurilor exînscrie

$$I_a\left(-\frac{a}{2(p-a)}, \frac{b}{2(p-a)}, \frac{c}{2(p-a)}\right), I_b\left(\frac{a}{2(p-a)}, \frac{-b}{2(p-a)}, \frac{c}{2(p-a)}\right),$$

$$I_c\left(\frac{a}{2(p-a)}, \frac{b}{2(p-a)}, \frac{-c}{2(p-a)}\right) \text{ și scriem ecuațiile dreptelor } I_a T_a, I_b T_b \text{ și } I_c T_c. \text{ Utilizând}$$

condiția de concurență a trei drepte $(d_i): a_i x + b_i y + c_i z = 0 \quad i = \overline{1,3}$ și anume

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ rezultă concluzia.}$$

Observație: Punctul de concurență al dreptelor AT_A, BT_B, CT_C se numește **al doilea punct al lui Malfatti** (μ_2).

III.45. Triunghiul lui Schroeter²²²

„Atâtea clăile de fire stângi
Găsi-vor gest închis să le rezume,
Să nege, dreapta, linia ce frângi
Ochi în virgin triunghi tăiat spre

lume?”

Ion Barbu²²³

**Fie $M_a M_b M_c$ și $H_a H_b H_c$ triunghiurile median, respectiv ortic ale unui triunghi neisoscel și nedreptunghic ABC , $\{A^*\} = M_b M_c \cap H_b H_c$, $\{B^*\} = M_c M_a \cap H_c H_a$, $\{C^*\} = M_a M_b \cap H_a H_b$. Dreptele AA^* , BB^* , CC^* sunt paralele între ele și perpendiculare pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .
*Demonstrație.***

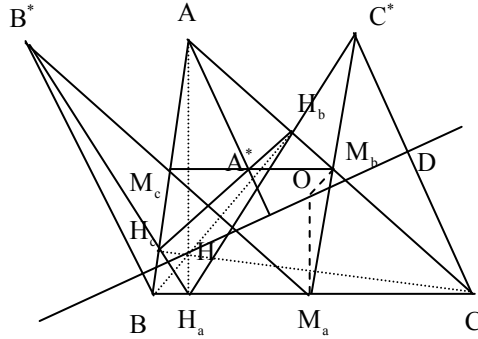


Fig. 478

Fie C_1 cercul lui Euler al triunghiului ABC , C_2 cercul circumscris patrulaterului $H_a H H_b C$ și C_3 cercul circumscris patrulaterului $M_a O M_b C$ (O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC), iar $\{D\} = C_2 \cap C_3$. Evident, $H_a, H_b \in C_1 \cap C_2$, $M_a, M_b \in C_1 \cap C_3$ și $C, D \in C_2 \cap C_3$. Atunci $H_a H_b, M_a M_b$ și CD sunt concurente fiind axele radicale corespunzătoare perechilor de cercuri considerate. Fie $\{C^*\} = H_a H_b \cap M_a M_b \cap CD$. $m(\angle M_a O D) = m(\angle H_a H D) = 180^\circ - m(\angle B C D)$ și cum $H H_a \perp O M_a$ rezultă că punctele H , O și D sunt coliniare. Deoarece patrulaterul $H H_a C D$ este inscriptibil rezultă $m(\angle H D C) = 180^\circ - m(\angle H H_a C) = 90^\circ$, deci $H O \perp C C^*$. Analog se arată că $A A^* \perp H O$ și $B B^* \perp H O$, deci $A A^* \parallel B B^* \parallel C C^*$.

Observație: Triunghiul $A^* B^* C^*$ se numește **triunghiul lui Schroeter**.

²²² Heinrich Schroeter (1829-1892) – matematician german, contribuții în geometrie

²²³ Ion Barbu (1895-1961) – matematician român, profesor la Universitatea din București, contribuții în algebră și geometrie

III.46. Triunghiul lui Țițeica²²⁴

„Țițeica era plin de vioiciune, fericit să-mi vorbească despre căminul său, radiind, cu privirea sa luminoasă și discretă, aceeași magnifică sănătate morală... Înțelegeam că în el se reuneau continuu preocuparea datoriei de împlinit și o euforie izvorâtă din conștiința datoriei împlinite...” – Henri Lebesgue²²⁵

Teorema lui Țițeica

Fie cercurile $C_1(O_1, R), C_2(O_2, R), C_3(O_3, R)$ **astfel încât** $\{H\} = C_1 \cap C_2 \cap C_3$, $\{A\} = C_1 \cap C_2$, $\{B\} = C_2 \cap C_3$, $\{C\} = C_3 \cap C_1$. **Cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cercurile C_1, C_2 și C_3 .**

Demonstrație.

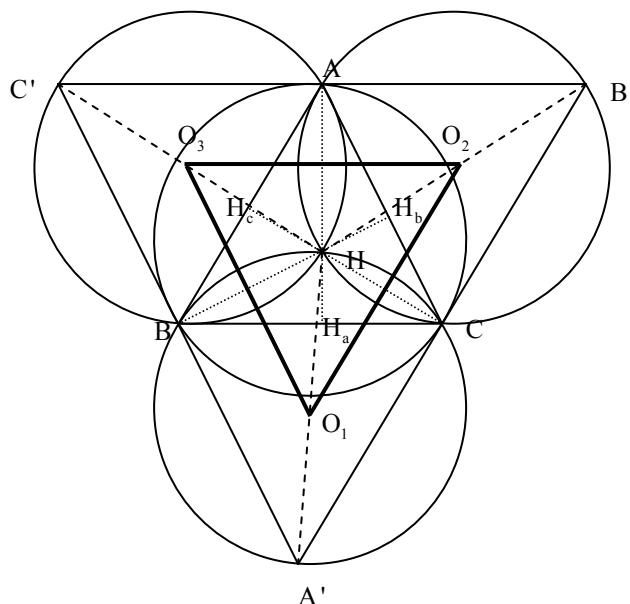


Fig. 479

Patrulaterul O_3AO_2H este romb, deoarece $AO_3 \equiv O_2H \equiv AO_2 \equiv O_3H$. De asemenea patrulaterul O_1BO_3H este romb, deci $AO_2 \parallel O_3H \parallel BO_1$ și deoarece $AO_2 \equiv BO_1 (= R)$ rezultă că patrulaterul ABO_1O_2 este paralelogram, deci $AB \equiv O_1O_2$. Analog, $BC \equiv O_2O_3$ și $CA \equiv O_3O_1$, deci triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sunt congruente, deci cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și $O_1O_2O_3$ sunt congruente. Deoarece $HO_1 \equiv HO_2 \equiv HO_3 (= R)$ rezultă că H este centrul cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$, deci și cercul circumscris triunghiului ABC are raza R .

Triunghiul $O_1O_2O_3$ se numește **triunghiul lui Țițeica**.

²²⁴ Gheorghe Țițeica (1873-1939) – matematician român, profesor la Universitatea București, membru al Academiei Române

²²⁵ Henri Lebesgue (1875-1941) – matematician francez, contribuții importante în analiza matematică

1) Punctul H este centrul cercului circumscris triunghiului lui Țițeica $O_1O_2O_3$.

Demonstrația este evidentă întrucât $HO_1 \equiv HO_2 \equiv HO_3 (= R)$.

2) Punctul H este ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Punctul O_1 este simetricul lui O_2 față de mijloacele segmentului HC , iar $O_1O_2 \parallel AB$, rezultă că $CH \perp AB$. Analog, $BH \perp AC$, deci H este ortocentrul triunghiului ABC .

Fie A', B', C' punctele de intersecție dintre HO_1, HO_2 și HO_3 cu cercurile C_1, C_2 respectiv C_3 .

3) Triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $HO_1 = O_1A' = HO_2 = O_2B' = R$, rezultă că O_1O_2 este linie mijlocie în triunghiul $HA'B'$, deci $O_1O_2 \parallel A'B'$ și cum $O_1O_2 \parallel AB$ rezultă $A'B' \parallel AB$. Deoarece O_1O_2 este mediatoarea segmentului HC , rezultă că $C \in A'B'$. Analog, punctele A, B', C' și A', B, C sunt coliniare și $B'C' \parallel BC, A'C' \parallel AC$, deci triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC .

4) Triunghiul lui Țițeica $O_1O_2O_3$ este omotetic cu triunghiul ABC , centrul de omotetie fiind centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $O_1O_2 \parallel AB, O_2O_3 \parallel BC$ și $O_1O_3 \parallel AC$, iar triunghiul ABC și $O_1O_2O_3$ sunt congruente, rezultă că triunghiurile sunt omotetice. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , $O(0)$. Atunci, $H(a+b+c)$, iar centrul cercului lui Euler $O_9\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$. Patrulateralele $AO_3HO_2, BO_1HO_3, CO_2HO_1$ fiind paralelograme rezultă $a+h=o_3+o_2, b+h=o_1+o_3, c+h=o_1+o_2$, de unde $o_1+o_2+o_3=2(a+b+c)=4o_9$, $o_1=4o_9-(a+2o_9)=2o_9-a=b+c, o_2=2o_9-b=a+c, o_3=2o_9-c=a+b$. Deoarece $\frac{a-o_9}{o_1-o_9}=-1 \in \mathbb{R}$ rezultă ca punctele A, O_9, O_1 sunt coliniare. Analog, B, O_9, O_2 și C, O_9, O_3 sunt coliniare, deci centrul de omotetie dintre triunghiurile $ABC, O_1O_2O_3$ este centrul lui Euler.

5) Dreptele AO, BO_2, CO_3 sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

6) Centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC este mijlocul segmentelor AO_1, BO_2, CO_3 .

Demonstrație. Din $\frac{a-o_9}{o_1-o_9} = -1$ rezultă $|a-o_9| = |o_1-o_9|$ adică $AO_9 \equiv O_9O_1$. Analog

$BO_9 \equiv O_9O_3$ și $CO_9 \equiv O_9O_1$.

7) Triunghiul median al triunghiului Țițeica este omotetic cu triunghiul ABC , centrul de omotetrie fiind ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Dacă $A_1B_1C_1$ este triunghiul median al triunghiului $O_1O_2O_3$ atunci $A_1B_1 \parallel O_1O_2 \parallel AB$ și omoloagele, iar $A_1 \in AH, B_1 \in BH$ și $C_1 \in CH$, deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt omotetice, iar H este centrul de omotetrie.

III.47. Triunghiurile lui Napoleon. Punctele lui Fermat²²⁶

„The last thing we want from you, general Lagrange, is a lesson in a geometry.” - Napoleon²²⁷

Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale AA_1B_1 , BB_1C_1 și CC_1A_1 , cercurile lor circumscrise având centrele N_a , N_b și N_c . Triunghiul $N_aN_bN_c$ se numește **triunghiul exterior al lui Napoleon**. Dacă triunghiurile echilaterale AA_2B_2 , BB_2C_2 și CC_2A_2 se construiesc în interiorul triunghiului ABC , atunci centrele lor N'_a , N'_b și N'_c sunt vârfurile unui triunghi numit **triunghiul interior al lui Napoleon**. Triunghiul $AA_1B_1C_1$ se numește **primul triunghi al lui Fermat**, iar triunghiul $AA_2B_2C_2$ se numește **al doilea triunghi al lui Fermat**.

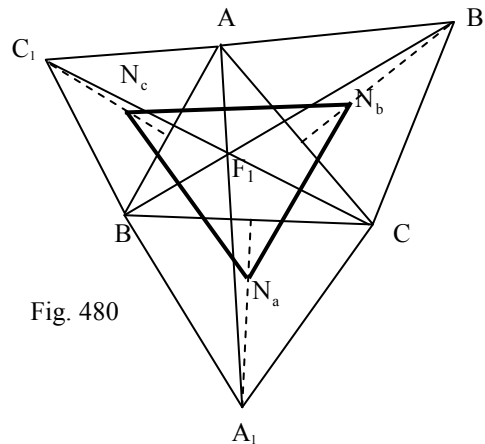


Fig. 480

1) Segmentele AA_1, BB_1, CC_1 sunt congruente.

Demonstrație. Din congruența triunghiurilor ABA_1 și C_1BC (deoarece $AB \equiv BC_1$,

²²⁶ Pierre de Fermat (1601-1665) – matematician francez, contribuții în teoria probabilităților și teoria numerelor

²²⁷ Napoleon Bonaparte (1769-1821) – cel mai important om politic și militar după Revoluția franceză, proclamat în 1804 drept Împărat al francezilor

$BA_1 \equiv BC$ și $\angle ABA_1 \equiv \angle BC_1C$ rezultă că $AA_1 \equiv CC_1$ (1). Din congruența triunghiurilor ACA_1 și BCB_1 rezultă $AA_1 \equiv BB_1$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă $AA_1 \equiv BB_1 \equiv CC_1$.

2) Cercurile circumscrise triunghiului A_1BC , AB_1C și ABC_1 au un punct comun.

Demonstrație. Fie F_1 al doilea punct de intersecție dintre cercurile circumscrise triunghiurilor BA_1C și CB_1A . Avem

$$m(\angle BF_1C) = 180^\circ - m(\angle BA_1C) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, m(\angle AF_1C) = 180^\circ - m(\angle CB_1A) = 120^\circ.$$

Atunci, $m(\angle AF_1B) = 360^\circ - [m(\angle BF_1C) + m(\angle CF_1A)] = 120^\circ$, deci $m(\angle AF_1B) + m(\angle AC_1B) = 180^\circ$, adică F_1 aparține și cercului circumscris triunghiului ABC_1 .

Observație: Punctul F_1 se numește **primul punct al lui Toricelli – Fermat**.

3) Dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente în punctul F_1 .

Demonstrație. Deoarece $m(\angle BF_1A_1) = m(\angle BCA_1) = \frac{1}{2}m(\angle BA_1) = 60^\circ$ și $m(\angle BF_1A_1) = 120^\circ$

rezultă $m(\angle AF_1B) + m(\angle BF_1A_1) = 180^\circ$, adică punctele A , F_1 , A_1 sunt coliniare, deci dreapta AA_1 trece prin punctul F_1 . Analog se arată că dreptele BB_1 și CC_1 trec prin F_1 .

4) Coordonatele unghiulare ale punctului F_1 sunt egale cu 120° , dacă unghiurile triunghiului ABC au măsura mai mică de 120° .
Demonstrația rezultă din cele de mai sus.

5) Dacă $m(\angle A) > 120^\circ$, atunci

$$m(\angle AF_1C) = m(\angle BF_1A) = 60^\circ \text{ și } m(\angle BF_1C) = 120^\circ.$$

Demonstrație. În cercul circumscris patrulaterului ACB_1F_1 avem:

$$m(\angle AF_1C) = m(\angle AB_1C) = 60^\circ \text{ iar în cercul}$$

circumscriș patrulaterului ABC_1F_1 avem

$$m(\angle AF_1B) = m(\angle AC_1B) = 60^\circ \text{ și}$$

$$m(\angle BF_1C) = 180^\circ - m(\angle BF_1A) = 120^\circ.$$

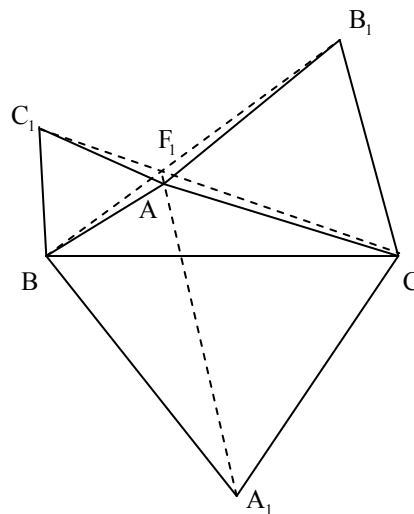


Fig. 481

6) Triunghiul exterior al lui Napoleon este echilateral.

Demonstrație. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC , CA respectiv AB . Avem :

$AN_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$, $AN_b = \frac{b\sqrt{3}}{3}$, iar $m(\angle N_bAN_c) = m(\angle BAC) + 60^\circ$. Din teorema cosinusului în triunghiul N_bAN_c avem

$$N_b N_c^2 = AN_b^2 + AN_c^2 - 2AN_b \cdot AN_c \cdot \cos(A + 60^\circ) = \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \left[\frac{1}{2} \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \right], \text{ adică}$$

$$N_b N_c^2 = \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{1}{6}(b^2 + c^2 - a^2) + 2 \cdot A_{[ABC]} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot A_{[ABC]}. \quad \text{Simetria}$$

rezultatului precedent ne conduce la concluzia $N_a N_b = N_b N_c = N_c N_a$, deci triunghiul exterior al lui Napoleon este echilateral.

7) Cercurile circumscrise triunghiurilor A_2BC , AB_2C , ABC_2 au un punct comun F_2 .

Demonstrație. Fie F_2 al doilea punct de intersecție dintre cercurile circumscrise triunghiurilor BA_2C și

AB_2C . Atunci, $m(\widehat{F_2B}) = m(\widehat{BA_2C}) = 60^\circ$,

$m(\widehat{B_2F_2C}) = m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ de unde rezultă că punctele

F_2 , B și B_2 sunt coliniare. Analog se arată că punctele

F_2 , A și A_2 sunt coliniare. Atunci, $m(\widehat{BF_2A}) = 120^\circ$,

deci $m(\widehat{BF_2A}) + m(\widehat{BC_2A}) = 180^\circ$, adică F_2 aparține cercului circumscris triunghiului ABC_2 .

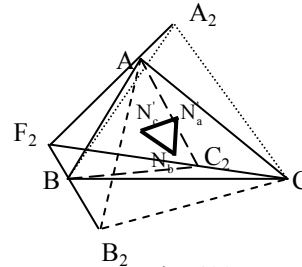


Fig. 482

Observație: Punctul F_2 se numește **al doilea punct Toricelli – Fermat**.

8) Dreptele AA_2 , BB_2 și CC_2 sunt concurente în punctul F_2 .

Demonstrație. Din aplicația precedentă $\{F_2\} = AA_2 \cap BB_2$. Deoarece patrulaterul BC_2AF_2

este inscripșibil rezultă $\widehat{BC_2F_2} \equiv \widehat{BAF_2}$. Din congruența triunghiurilor BC_2C și BAA_2

rezultă $\widehat{BC_2C} \equiv \widehat{BAA_2}$ de unde $m(\widehat{BC_2F_2}) + m(\widehat{BC_2C}) = m(\widehat{BAA_2}) + m(\widehat{BAF_2}) = 180^\circ$, deci punctele F_2 , C_2 , C sunt coliniare.

9) Segmentele AA_2 , BB_2 și CC_2 sunt congruente.

Demonstrație: Din congruența triunghiurilor ACA_2 și B_2CB (deoarece $AC \equiv B_2C$,

$A_2C \equiv BC$ și $m(\widehat{ACA_2}) = m(\widehat{B_2CB}) = 60^\circ - m(\widehat{C})$) rezultă $AA_2 \equiv BB_2$ (1), iar congruența

triunghiurilor AA_2B și CC_2B rezultă $AA_2 \equiv CC_2$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că

$AA_2 \equiv BB_2 \equiv CC_2$.

10) Triunghiul interior al lui Napoleon $N'_a N'_b N'_c$ este echilateral.

Demonstrație. Avem $AN'_c = \frac{c\sqrt{3}}{3}$, $AN'_b = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ iar $m(\widehat{N'_b AN'_c}) = |m(\widehat{BAC}) - 60^\circ|$. Din

teorema cosinusului în triunghiul $N'_b AN'_c$ rezultă $N'_b N'_c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot A_{[ABC]}$.

Simetria relației precedente conduce la $N'_a N'_b = N'_b N'_c = N'_c N'_a$.

Observație: Inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot A_{[ABC]}$ este echivalentă cu $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$, evident adevărată (unde am folosit formulele lui Heron în exprimarea ariei triunghiului ABC).

11) Primul punct Fermat verifică egalitatea: $F_1A_1 + F_1B_1 + F_1C_1 = 2(F_1A + F_1B + F_1C)$.

Demonstrație. Deoarece patrulaterul F_1BA_1C , F_1CB_1A și F_1AC_1B sunt inscriptibile, din relația lui Schooten rezultă $F_1A_1 = F_1B + F_1C$, $F_1B_1 = F_1A + F_1C$ și $F_1C_1 = F_1A + F_1B$ relații care prin sumare dau $F_1A_1 + F_1B_1 + F_1C_1 = 2(F_1A + F_1B + F_1C)$.

12) Dreptele A_1N_a , B_1N_b și C_1N_c sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă deoarece A_1N_a , B_1N_b și C_1N_c sunt mediatoarele laturilor BC , CA respectiv AC .

13) Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

Demonstrație. Deoarece $A_1N_a \perp BC$, $B_1N_b \perp AC$, $C_1N_c \perp AB$ și $A_1N_a \cap B_1N_b \cap C_1N_c = \{O\}$ rezultă că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice, O fiind un centru de ortologice.

14) Triunghiul exterior al lui Napoleon $N_aN_bN_c$ și triunghiul $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

Demonstrația rezultă de mai sus.

15) Dreptele $A_2N'_a$, $B_2N'_b$, $C_2N'_c$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă deoarece $A_2N'_a$, $B_2N'_b$, $C_2N'_c$ sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC .

16) Triunghiurile antipodare ale punctelor lui Fermat corespunzătoare unui triunghi ABC sunt echilaterale.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antipodar”.

17) Dreptele AN_a , BN_b , CN_c sunt concurente.

Demonstrație. Soluția 1. Fie $\{A'\} = AN_a \cap BC$, $\{B'\} = BN_b \cap AC$, $\{C'\} = CN_c \cap BA$.

Atunci: $\frac{BA'}{A'C} = \frac{A_{[ABN_a]}}{A_{[ACN_a]}} = \frac{AB \cdot BN_a \cdot \sin(B + 30^\circ)}{AC \cdot CN_a \cdot \sin(C + 30^\circ)} = \frac{AB \cdot \sin(B + 30^\circ)}{AC \cdot \sin(C + 30^\circ)}$,

$\frac{CB'}{B'A} = \frac{BC \cdot \sin(C + 30^\circ)}{BA \cdot \sin(A + 30^\circ)}$, $\frac{AC'}{C'B} = \frac{CA \cdot \sin(A + 30^\circ)}{CB \cdot \sin(B + 30^\circ)}$, de unde rezultă că

$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$ și conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că dreptele

AN_a , BN_b , CN_c sunt concurente.

Soluția 2. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem: $A_1 = \mathfrak{R}_C^{60^\circ}(B)$, $B_1 = \mathfrak{R}_A^{60^\circ}(C)$, $C_1 = \mathfrak{R}_B^{60^\circ}(A)$, (unde prin $\mathfrak{R}_X^{60^\circ}(Y)$ am notat rotația de centru X și unghi 60° a

punctului Y). Atunci, $a_1 = c + \omega(b - c)$, $b_1 = a + \omega(c - a)$, $c_1 = b + \omega(a - b)$, unde $\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ și $n_a = \frac{b + c + a_1}{3} = \frac{b + 2c + \omega(b - c)}{3}$ (1), $n_b = \frac{a + c + b_1}{3} = \frac{c + 2a + \omega(c - a)}{3}$ (2), $n_c = \frac{a + b + c_1}{3} = \frac{a + 2b + \omega(a - b)}{3}$ (3). Ecuațiile dreptelor AN_a, BN_b, CN_c sunt: $(AN_a): (\bar{a} - \bar{n}_a)z - (a - n_a)\bar{z} + \bar{a}n_a - \bar{a}n_a = 0$ (4), $(BN_b): (\bar{b} - \bar{n}_b)z - (b - n_b)\bar{z} + \bar{b}n_b - \bar{b}n_b = 0$ (5), $(CN_c): (\bar{c} - \bar{n}_c)z - (c - n_c)\bar{z} + \bar{c}n_c - \bar{c}n_c = 0$ (6). Sumând ecuațiile (4), (5), (6) - ținând seama de relațiile (1), (2), (3) precum și de: $\omega + \bar{\omega} = 1$, $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, $\omega^3 = -1$ - rezultă o identitate, ceea ce arată că dreptele sunt concurente.

18) Triunghiul exterior al lui Napoleon $N_a N_b N_c$ și triunghiul $A_1 B_1 C_1$ sunt ortologice.

Demonstrație. Utilizând notațiile din teorema precedentă rezultă $n_b - n_c = \frac{3c - 3b + i\sqrt{3}(c - 2a + b)}{3}$ și $a_1 - a = \frac{b - 2a + c + i\sqrt{3}(b - c)}{2} = \frac{i\sqrt{3}(c - 2a + b) + 3c - 3b}{2i\sqrt{3}}$, de unde $\frac{n_b - n_c}{a_1 - a} = \frac{i\sqrt{3}}{3} \in i\mathbb{R}^*$, deci $N_b N_c \perp AA_1$. Analog se arată că $N_a N_b \perp CC_1$ și $N_a N_c \perp BB_1$ și cum $A_1 A \cap B_1 B \cap C_1 C = \{F_1\}$ rezultă concluzia.

19) Triunghiul exterior al lui Napoleon $N_a N_b N_c$ și triunghiul antipodar al primului punct al lui Fermat sunt omotetice.

Demonstrație. Fie $A''B''C''$ triunghiul antipodar corespunzător punctului F_1 . Deoarece $AF_1 \perp B''C''$ și $N_b N_c \perp AF_1$ (cf. teoremei precedente) rezultă că $N_b N_c \parallel B''C''$. Analog se arată că $N_b N_a \parallel B''A''$ și $N_a N_c \parallel A''C''$, rezultă că triunghiurile $N_a N_b N_c$ și $A''B''C''$ sunt omotetice.

20) Triunghiurile ABC și $A_1 B_1 C_1$ au același centru de greutate.

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem: $b + \varepsilon c + \varepsilon^2 a_1 = 0$, $c + \varepsilon a + \varepsilon^2 b_1 = 0$, $a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c_1 = 0$, unde $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Adunând relațiile precedente membru cu membru obținem: $(1 + \varepsilon)(a + b + c) = -\varepsilon^2(a_1 + b_1 + c_1)$, adică $a + b + c = a_1 + b_1 + c_1$, deci triunghiurile ABC și $A_1 B_1 C_1$ au același centru de greutate.

21) Triunghiurile ABC și $N_a N_b N_c$ au același centru de greutate.

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem: $n_a = \frac{b + c + a_1}{3}$, $n_b = \frac{a + c + b_1}{3}$, $n_c = \frac{a + b + c_1}{3}$, de unde rezultă $n_a + n_b + n_c = \frac{2(a + b + c) + a_1 + b_1 + c_1}{3} = \frac{2(a + b + c) + a + b + c}{3} = a + b + c$ (unde am utilizat proprietatea precedentă).

Observație: Din proprietățile precedente rezultă că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $N_aN_bN_c$ au același centru de greutate.

22) Triunghiurile ABC și $N'_aN'_bN'_c$ au același centru de greutate.
Demonstrație analoagă celei precedente.

23) Triunghiurile lui Napoleon interior și exterior au același centru de greutate.
Demonstrația rezultă din proprietățile precedente.

Observație: Din cele de mai sus rezultă că triunghiurile lui Napoleon și triunghiurile lui Fermat au același centru de greutate.

24) Aria triunghiului Napoleon exterior $N_aN_bN_c$ este egală cu:

$$A_{[N_aN_bN_c]} = \frac{1}{2} \cdot A_{[ABC]} + \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Demonstrație. Avem $A_{[N_aN_bN_c]} = \frac{N_aN_b^2\sqrt{3}}{4} = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot A_{[ABC]} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} \right] \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, de unde rezultă concluzia.

25) Aria triunghiului Napoleon interior $N'_aN'_bN'_c$ este egală cu:

$$A_{[N'_aN'_bN'_c]} = \frac{1}{2} \cdot A_{[ABC]} + \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \text{ Demonstrație analoagă precedentei.}$$

Observație: Din proprietățile precedente rezultă $A_{[N_aN_bN_c]} - A_{[N'_aN'_bN'_c]} = A_{[ABC]}$.

26) Fie $N_aN_bN_c$ și $N'_aN'_bN'_c$ triunghiurile lui Napoleon, $T_AT_BT_C$ triunghiul tangențial al unui triunghi ABC . Punctele N_a, N'_a, T_A sunt coliniare.

Demonstrația este evidentă deoarece punctele N_a, N'_a, T_A aparțin medietoarei segmentului BC .

Observație: Analog se arată că punctele N_b, N'_b, T_B , respectiv N_c, N'_c, T_C sunt coliniare.

27) Izogonalele punctelor F_1 și F_2 ale lui Fermat sunt punctele izodinamice S și S' ale triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Puncte izodinamice”.

28) Triunghiul exterior al lui Napoleon $N_aN_bN_c$ este omotetic cu triunghiul podar $S_aS_bS_c$ al primului punct izodinamic S al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Puncte izodinamice”.

29) Triunghiul interior al lui Napoleon este omotetic cu triunghiul podar al celui de al doilea punct izodinamic al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Puncte izodinamice”.

30) Fie $A_1B_1C_1$ primul triunghi al lui Fermat al unui triunghi ABC și punctele $A' \in (AA_1), B' \in (BB_1), C' \in (CC_1)$ astfel încât $A'A_1 = 2AA', B'B_1 = 2BB'$ și $C'C_1 = 2CC'$. Triunghiurile $A'B'C'$ și al doilea triunghi al lui Napoleon $N_a'N_b'N_c'$ sunt congruente.

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Atunci, $A_1 = R_C^{60^\circ}(B), B_1 = R_A^{60^\circ}(C), C_1 = R_B^{60^\circ}(A)$ (unde $R_X^\theta(Y)$ înțelegem rotația de centru X și unghi θ a punctului Y), de unde $a_1 = c + \theta(b-c), b_1 = a + \theta(c-a)$ și $c_1 = a + \theta(a-b)$ - unde $\theta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$. Deoarece $A'A_1 = 2AA'$ rezultă $a' = \frac{c + \theta(b-c) + 2a}{3}$. Analog,

$$b' = \frac{a + \theta(c-a) + 2b}{3} \text{ și } c' = \frac{b + \theta(a-b) + 2c}{3}. \text{ Deoarece } A_2 \text{ este simetricul lui } A_1 \text{ față de}$$

$$BC \text{ rezultă } a_2 = b + c - a_1 = b - \theta(b-c) \text{ de unde } n_a' = \frac{b + c + a_2}{3} = \frac{2b + c - \theta(b-c)}{3}.$$

$$\text{Analog, } n_b' = \frac{2c + a - \theta(c-a)}{3} \text{ și } n_c' = \frac{2a + b - \theta(a-b)}{3}. \text{ Deoarece}$$

$|a' - b'| = |n_a' - n_b'|, |a' - c'| = |n_a' - n_c'|$ și $|b' - c'| = |n_b' - n_c'|$ rezultă că $A'B' \equiv N_a'N_b', A'C' \equiv N_a'N_c'$ și $B'C' \equiv N_b'N_c'$ adică triunghiurile $A'B'C'$ și $N_a'N_b'N_c'$ sunt congruente.

Observație: Deoarece triunghiul $N_a'N_b'N_c'$ este echilateral rezultă că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.

31) Triunghiul $A'B'C'$ și al doilea triunghi al lui Napoleon au același centru de greutate.

Demonstrație. Deoarece $a' + b' + c' = n_a' + n_b' + n_c' = a + b + c$ rezultă că centrele de greutate ale triunghiurilor $A'B'C'$ și $N_a'N_b'N_c'$ coincid.

Observație: Centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ coincide cu centrul de greutate (G) al triunghiului ABC .

32) Sunt adevărate relațiile: $GA' \parallel AA_2, GB' \parallel BB_2, GC' \parallel CC_2$, $GA' \equiv GB' \equiv GC'$ și

$$GA' = \frac{1}{3}AA_2, GB' = \frac{1}{3}BB_2, GC' = \frac{1}{3}CC_2.$$

Demonstrație. Din $\frac{g-a'}{a-a_2} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{C}$ rezultă că $GA' \parallel AA_2$

$$\text{și } \left| \frac{g-a'}{a-a_2} \right| = \frac{1}{3} \text{ adică } GA' = \frac{1}{3}AA_2. \text{ Deoarece}$$

$$AA_2 \equiv BB_2 \equiv CC_2 \text{ rezultă } GA' \equiv GB' \equiv GC'.$$

33) Hexagonul $A'N_c'C'N_a'B'N_b'$ este regulat.

Demonstrația este evidentă deoarece $A'N_c' \equiv N_c'C'$.

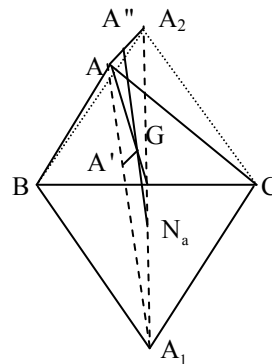


Fig. 483

Consecință: Punctele A', B', C' aparțin cercului circumscris celui de-al doilea triunghi al lui Napoleon corespunzător triunghiului ABC .

34) Primul punct al lui Fermat (F_1) corespunzător unui triunghi ABC aparține cercului circumscris al celui de-al doilea triunghi al lui Napoleon al triunghiului ABC .

Demonstrație. Din $m(\square A_1 F_1 B_1) = m(\square A' F_1 B') = 120^\circ$ și $m(\square A' C' B') = 60^\circ$ rezultă $m(\square A' F_1 B') + m(\square A' C' B') = 180^\circ$, adică patrulaterul $F_1 A' C' B'$ este inscriptibil, deci F_1 aparține cercului circumscris triunghiului $A' B' C'$ și conform proprietății precedente – aparține cercului circumscris triunghiului $N_a' N_b' N_c'$.

35) Al doilea punct al lui Fermat (F_2) aparține cercului circumscris primului triunghi al lui Napoleon corespunzător unui triunghi ABC .

Demonstrația este analoagă cu precedentă.

36) Fie $A'' \in (AA_2), B'' \in (BB_2), C'' \in (CC_2)$ astfel încât $A'' A_2 = 2AA'', B'' B_2 = 2BB''$.

Punctele A'', B'', C'' aparțin cercului circumscris primului triunghi al lui Napoleon.

Demonstrație. Patrulateralele $AA'GA'', BB'GB'', CC'GC''$ sunt paralelograme (deoarece

$GA' \square AA'', GA' = \frac{1}{3} AA_2 = AA'')$, de unde $GA'' \square AA_1$ și $GA'' = \frac{1}{3} AA_1$. Analog,

$GB'' = \frac{1}{3} BB_1$ și $GC'' = \frac{1}{3} CC_1$. Cum $AA_1 \equiv BB_1 \equiv CC_1$ rezultă că $GA'' \equiv GB'' \equiv GC''$.

Deoarece $|g - a''| = |g - n_a|$ rezultă că punctele A'', B'', C'' aparțin cercului circumscris triunghiului $N_a N_b N_c$.

37) Triunghiul $A'' B'' C''$ este echilateral și congruent cu primul triunghi al lui Napoleon $N_a N_b N_c$ corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Se arată fără dificultate că $|a'' - b''| = |n_a - n_b|$ și $|a'' - c''| = |n_a - n_c|$ adică $A'' B'' \equiv N_a N_b$ și $A'' C'' \equiv N_a N_c$.

III.48. Triunghiurile lui Vecten

„Desenul corupe raționamentul” – Ion Barbu

Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior pătratele $BCA_C A_B$, $ACB_C B_A$ și $ABC_B C_A$ care au centrele O_A , O_B , respectiv O_C . Triunghiul $O_A O_B O_C$ determinat de centrele acestor pătrate se numește **triunghiul Vecten exterior**.

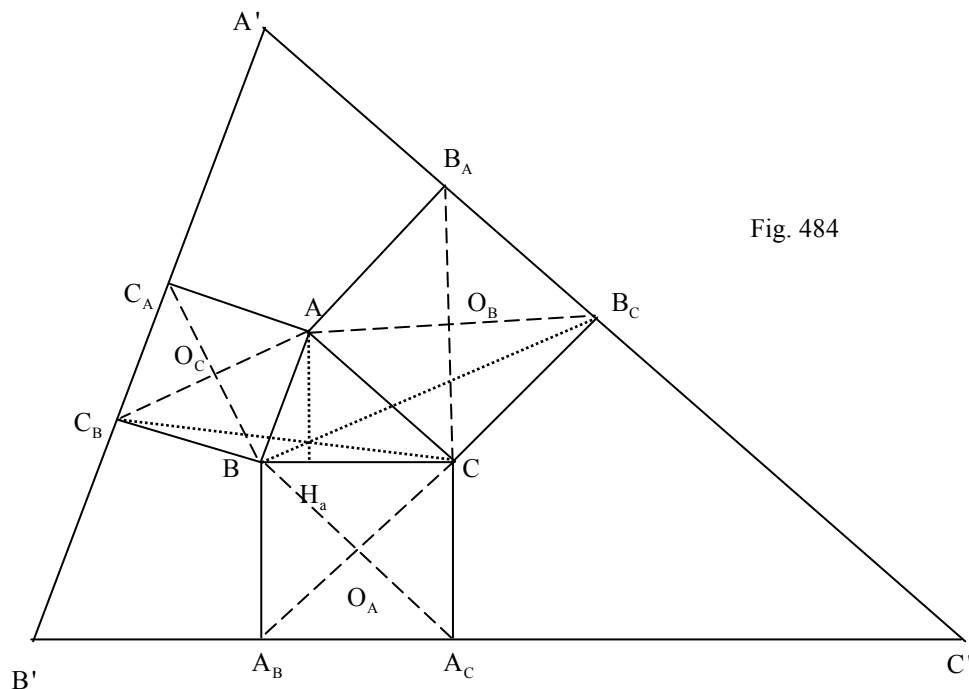


Fig. 484

1) Dreptele AO_A , BO_B , CO_C sunt concurente.

Demonstrație. Triunghiurile dreptunghice isoscele ACO_B și ABO_C sunt asemenea, atunci

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AO_C}{AO_B}, \quad \text{de unde} \quad AB \cdot AO_B = AC \cdot AO_C \quad \text{și} \quad \text{de aici}$$

$$AB \cdot AO_B \cdot \sin \angle BAO_B = AC \cdot AO_C \cdot \sin \angle CAD_C \quad (\text{deoarece } \angle BAO_B \equiv \angle CAD_C), \quad \text{deci}$$

$$A_{[ABO_B]} = A_{[ACO_C]}. \quad \text{Analog se arată că } A_{[BCO_C]} = A_{[BAO_C]} \text{ și } A_{[CAO_A]} = A_{[CBO_B]} \quad (1). \text{ Fie}$$

$$\{A_1\} = AO_A \cap BC, \quad \{B_1\} = BO_B \cap AC \quad \text{și} \quad \{C_1\} = CO_C \cap AB. \quad \text{Atunci,}$$

$$\frac{A_{[ABO_A]}}{A_{[ACO_A]}} = \frac{AO_A \cdot h_1}{AO_A \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{BA_1}{A_1C} \quad (\text{unde } h_1 \text{ și } h_2 \text{ sunt lungimile înălțimilor duse din } B \text{ și } C$$

pe latura AO_A în triunghiurile ABO_A , respectiv ACO_A). Analog, $\frac{A_{[O_B BC]}}{A_{[O_B BA]}} = \frac{B_1 C}{B_1 A}$ și

$\frac{A_{[O_C C A]}}{A_{[O_C C B]}} = \frac{C_1 A}{C_1 B}$. (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă: $\frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{B_1 C}{B_1 A} \cdot \frac{C_1 A}{C_1 B} = 1$ și conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AO_A , BO_B și CO_C sunt concurente.

Observație: Punctul de concurență al dreptelor AO_A , BO_B și CO_C se numește **punctul lui Vecten exterior** (V_1).

2) Sunt adevărate relațiile: $AO_A \perp O_B O_C$, $BO_B \perp O_C O_A$, $CO_C \perp O_A O_B$.

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Prin rotația de centru O_C și unghi $\frac{\pi}{2}$, punctul B ajunge în A , deci $A = \Re_{O_C}^{\frac{\pi}{2}}(B)$, de unde

$a = o_C + \omega(b - o_C)$, unde $\omega = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, adică $o_C = \frac{a - ib}{1 - i}$. Analog, $B = \Re_{O_A}^{\frac{\pi}{2}}(C)$

și $C = \Re_{O_B}^{\frac{\pi}{2}}(A)$, de unde $o_A = \frac{b - ic}{1 - i}$ și $o_B = \frac{c - ia}{1 - i}$. Atunci, $\frac{a - o_A}{o_C - o_B} = -i \in i \cdot \mathbb{R}^*$, adică

$OO_A \perp O_B O_C$. Analog se arată că $BO_B \perp O_C O_A$ și $CO_C \perp O_A O_B$.

Observație: Ortocentrul triunghiului $O_A O_B O_C$ este punctul de intersecție al dreptelor AO_A , BO_B și CO_C .

3) Sunt adevărate relațiile: $AO_A \equiv O_B O_C$, $BO_B \equiv O_C O_A$, $CO_C \equiv O_A O_B$.

Demonstrație. Din $\frac{a - o_A}{o_C - o_B} = -i$ rezultă $\left| \frac{a - o_A}{o_C - o_B} \right| = |-i| = 1$, adică $|a - o_A| = |o_C - o_B|$, de

unde $AO_A \equiv O_B O_C$. Analog se arată că $BO_B \equiv O_C O_A$ și $CO_C \equiv O_A O_B$.

Observație: Cu segmentele AO_A , BO_B și CO_C se poate construi un triunghi congruent cu triunghiul $O_A O_B O_C$.

4) Triunghiurile $AB_A C_A$, $BA_B C_B$, $CA_C B_C$ și ABC au aceeași arie.

Demonstrație. Avem $A_{[AB_A C_A]} = \frac{AC_A \cdot AB_A \cdot \sin \angle AB_A C_A}{2}$. Deci $AC_A = AB = c$,

$AB_A = AC = b$ și $\sin(\angle AB_A C_A) = \sin(360^\circ - 180^\circ - \angle A) = \sin(180^\circ - \angle A) = \sin \angle A$, deci

$A_{[AB_A C_A]} = \frac{bc \sin \angle A}{2} = A_{[ABC]}$. Analog se arată că $A_{[AB_A C_A]} = A_{[CA_C B_C]} = A_{[ABC]}$.

5) **Laturile triunghiului Vecten exterior au lungimile** $a' = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}$,
 $b' = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}$ și $c' = \sqrt{\frac{b^2 + a^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}$, unde a', b', c' sunt lungimile laturilor
 $O_B O_C$, $O_A O_C$, respectiv $O_A O_B$.

Demonstrație. Din teorema cosinusului în triunghiul $AO_B O_C$ obținem

$$O_B O_C^2 = O_B A^2 + O_C A^2 - 2 O_B A \cdot O_C A \cdot \cos \angle O_B A O_C. \quad \text{Dar } O_B A = \frac{b\sqrt{2}}{2}, \quad O_C A = \frac{c\sqrt{2}}{2},$$

$$m(\angle O_B A C_C) = 90^\circ + m(\angle B A C), \text{ deci } a'^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + 2 \cdot \frac{bc \cdot \sin \angle A}{2}, \quad \text{adică}$$

$$a' = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}. \quad \text{Analog, } b' = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 + 4A_{[ABC]}}{2}} \text{ și } c' = \sqrt{\frac{b^2 + a^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}.$$

6) **Este adevărată relația:** $B_A C_A^2 + C_B A_B^2 + A_C B_C^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Demonstrație. Teorema cosinusului în triunghiul $AB_A C_A$ ne dă:

$$B_A C_C^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle B_A C A, \quad \cos \angle B_A C A = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos \angle A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc},$$

de unde $B_A C_A^2 = b^2 + c^2 - (a^2 - b^2 - c^2) = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Analog,
 $C_B A_B^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ și $A_C B_C^2 = 2b^2 + 2a^2 - c^2$, de unde
 $B_A C_A^2 + C_B A_B^2 + A_C B_C^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

7) **Dreptele AA_C și BB_C sunt perpendiculare.**

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem:

$$A_C = \Re_{\frac{\pi}{2}}^C(B) \text{ și } B_C = \Re_{\frac{\pi}{2}}^C(A), \text{ deci } a_C = c + i(b - c) \text{ și } b_C = c - i(a - c). \text{ Atunci:}$$

$$\frac{a - a_C}{b - b_C} = \frac{-i[b - c + i(a - c)]}{b - c + i(a - c)} = -i \in i \cdot \mathbb{R}^*, \text{ deci } AA_C \perp BB_C.$$

Observație: Analog se arată că $AA_B \perp CC_B$ și $BB_A \perp CC_A$.

8) **Fie G_A, G_B, G_C , centrele de greutate ale triunghiurilor $AB_A C_A, BC_B A_B$ respectiv $CA_C B_C$. Dreptele AG_A, BG_B și CG_C sunt concurente în ortocentrul H al triunghiului ABC .**

Demonstrație. Fie B_1 al patrulea vârf al paralelogramului $BC_B B_1 A_B$ și $\{H_B\} = BB_1 \cap AC$. Deoarece

$$m(\angle A_B B C_B) = 180^\circ - m(\angle B) \quad \text{rezultă}$$

$$m(\angle B A_B B_1) = m(\angle B). \quad \text{Atunci } \text{triunghiul}$$

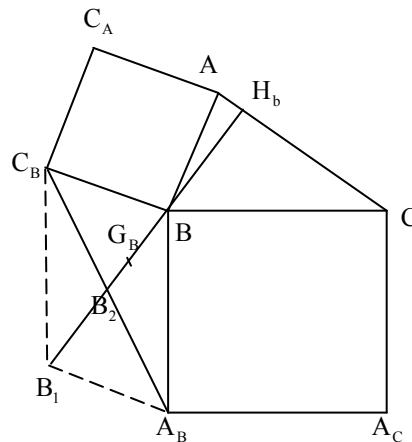


Fig. 485

ABC și B_1A_BB sunt congruente ($m(\square BA_BB_1) = m(\square B)$, $AB \equiv BC_B \equiv B_1A_B$, $BC \equiv BA_B$),
 deci $m(\square BB_1A_B) = m(\square BAC) = m(\square B_1BC_B)$. Deoarece
 $m(\square B_1BC_B) + m(\square ABH_b) = 180^\circ - m(\square CBA) = 90^\circ$
 deci $m(\square BAH_b) + m(\square ABH_b) = 90^\circ$, de unde rezultă că $BH_b \perp AC$ (1). Deoarece într-un
 paralelogram diagonalele se înjumătățesc, rezultă că BB_2 este mediană în triunghiul
 BA_BB_C , deci $G_B \in B_1B$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $G_BB \perp AC$. Analog, $AG_A \perp BC$ și
 $CG_C \perp AB$, de unde rezultă că BG_B , CG_C sunt dreptele suport ale înălțimilor triunghiului
 ABC , deci sunt concurente în ortocentrul triunghiului ABC .

**9) Fie H_A, H_B, H_C ortocentrele triunghiurilor AB_AC_A , BA_BC_B respectiv CA_CB_C .
 Dreptele AH_A, BH_B și CH_C sunt concurente în centrul de greutate al triunghiului
 ABC .**

Demonstrație. Fie A_1 cel de-al
 patrulea vârf al paralelogramului
 $C_AAB_AA_1$, $AP \perp B_AC_A$, $BQ \perp AC_A$,
 $(P \in B_AC, Q \in AC_A)$ și $\{M_a\} = AP \cap BC$
 Cum $\square B_AC_AQ \equiv \square AH_AB$, $C_AA \perp AB$
 și $C_AA \perp H_AQ$ rezultă $AB \parallel H_AQ$,
 deci $\square BAM_a \equiv \square AH_aQ$ (alterne
 interne). Deoarece $\square AA_1C_A \equiv \square BCA$
 (vezi proprietatea anterioară) rezultă
 $\square C_AA_2 \equiv \square ABC$, deci triunghiurile
 ABM_a și C_AA_2 sunt congruente, de

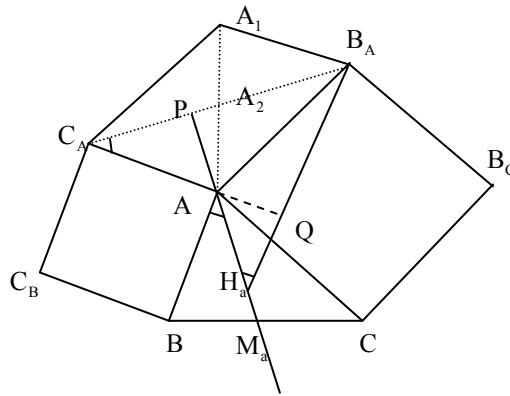


Fig. 486

unde $BM_a = AA_2 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}BC$,
 deci M_a e mijlocul segmentului BC ,
 adică AM_a este mediană în triunghiul ABC , adică G -centrul de greutate al triunghiului
 ABC - aparține dreptei AH_a . Analog, $G \in BH_B$ și $G \in CH_C$.

Observație: Din congruența triunghiurilor ABM_a și
 C_AA_2 rezultă $AM_a = C_AA_2 = \frac{1}{2}B_AC_A$, deci
 $B_AC_A = 2AM_2 = 2m_a$. Analog $A_BC_B = 2m_b$ și
 $A_CB_C = 2m_c$ (unde m_a, m_b, m_c sunt lungimile
 medianelor triunghiului ABC). Atunci
 $B_AC_A^2 + A_BC_B^2 + A_CB_C^2 = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Dacă pe laturile triunghiului ABC se construiesc spre
 interior pătratele $BCA'_CA'_B$, $ACB'_CB'_A$, $BAC'_AC'_B$ având
 centrele O'_A, O'_B respectiv O'_C . Triunghiul $O'_AO'_BO'_C$ se
 numește **triunghiul Vecten interior** (Fig. 487).

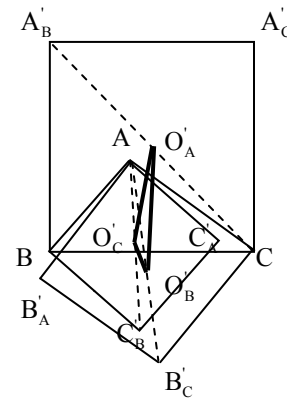


Fig. 487

10) Sunt adevărate relațiile: $AO'_A \perp O'_B O'_C$, $BO'_B \perp O'_A O'_C$, $CO'_C \perp O'_B O'_A$.

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem:

$$A = \Re_{O'_B}^{\frac{\pi}{2}}(C), \quad B = \Re_{O'_C}^{\frac{\pi}{2}}(A), \quad C = \Re_{O'_A}^{\frac{\pi}{2}}(B), \quad \text{deci } o'_B = \frac{a-ic}{1-i}, \quad o'_C = \frac{b-ia}{1-i}, \quad o'_A = \frac{c-ib}{1-i}, \quad \text{de}$$

$$\text{unde } \frac{a-o'_A}{o'_B-o'_C} = \frac{-i(a+ai-ic-b)}{a+ai-ic-b} = -i \in i \cdot \square^*, \quad \text{de unde rezultă } AO'_A \perp O'_B O'_C. \quad \text{Analog,}$$

$$BO'_B \perp O'_A O'_C \text{ și } CO'_C \perp O'_B O'_A.$$

11) Sunt adevărate relațiile: $AO'_A \equiv O'_B O'_C$, $BO'_B \equiv O'_A O'_C$ și $CO'_C \equiv O'_B O'_A$.

$$\text{Demonstrație. Din } \frac{a-o'_A}{o'_B-o'_C} = -i \text{ rezultă } \left| \frac{a-o'_A}{o'_B-o'_C} \right| = |-i| = 1, \text{ de unde } |a-o'_A| = |o'_B-o'_C|,$$

$$\text{adică } AO'_A \equiv O'_B O'_C. \text{ Analog se arată că } BO'_B \equiv O'_A O'_C \text{ și } CO'_C \equiv O'_B O'_A.$$

Observație: Cu lungimile segmentelor AO'_A , BO'_B , CO'_C se poate construi un triunghi congruent cu triunghiul Vecten interior.

12) Dreptele AO'_A , BO'_B , CO'_C sunt concurente.

Demonstrație. Dreptele AO'_A , BO'_B , CO'_C fiind perpendiculare pe dreptele $O'_B O'_C$, $O'_A O'_C$, $O'_B O'_A$, sunt dreptele suport ale triunghiului $O'_A O'_B O'_C$, deci sunt concurente în ortocentrul triunghiului Vecten interior.

Observație: Punctul de concurență al dreptelor $O'_B O'_C$, $O'_A O'_C$, $O'_B O'_A$ se numește **punctul Vecten interior**.

13) Triunghiurile ABA'_B și BCC'_B ; BCB'_C și ACA'_C , respectiv ABB'_A și ACC'_A au aceeași arie.

Demonstrație. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC , CA respectiv AB . Din $\square ABA'_B \equiv \square BCB'_C$ (unghiuri cu laturile perpendiculare două câte două) rezultă

$$A_{[ABA'_B]} = \frac{AB \cdot BA'_B \cdot \sin \square ABA'_B}{2} = \frac{BA'_B \cdot BC \cdot \sin \square BCB'_C}{2} = A_{[BCB'_C]}. \quad \text{Analog se arată că}$$

$$A_{[BCB'_C]} = A_{[ACA'_C]} \text{ și } A_{[ABB'_A]} = A_{[ACC'_A]}.$$

14) Dreptele BB_C , CC_B și înălțimea din A a triunghiului ABC sunt concurente.

Demonstrație. Fie AH_a înălțimea din A , notăm $m(\square BAH_a) = \alpha_1$, $m(\square H_a AC) = \alpha_2$, $m(\square CBB_C) = \beta_1$, $m(\square B_C BA) = \beta_2$, $m(\square ACC_B) = \gamma_1$, $m(\square C_B CB) = \gamma_2$. Din teorema

sinusurilor avem: $\frac{CB_C}{\sin \beta_1} = \frac{BB_C}{\sin(90^\circ + C)}$ și $\frac{AB_C}{\sin \beta_2} = \frac{BB_C}{\sin(45^\circ + A)}$, de unde

$$\sin \beta_1 = \frac{b \cos C}{BB_C} \text{ și } \sin \beta_2 = \frac{b\sqrt{2} \sin(A + 45^\circ)}{BB_C} \text{ deci } \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\cos C}{\sqrt{2} \sin(A + 45^\circ)} \quad (1).$$

Analog se arată că $\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sqrt{2} \sin(A + 45^\circ)}{\cos B}$. Dar $\sin \alpha_1 = \sin(90^\circ - B) = \cos B$ și $\sin \alpha_2 = \sin(90^\circ - C) = \cos C$, de unde $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$, și din reciproca teoremei lui Ceva sub formă trigonometrică rezultă concurența dreptelor BB_C , CC_B și AH_a .

Observație: Dacă triunghiul nu este ascuțitunghic, rezultatul se pastrează, dar calculele suferă unele modificări.

15) Fie $\{A'\} = C_A C_B \cap B_A B_C$, $\{B'\} = C_A C_B \cap A_B A_C$ **și** $\{C'\} = A_B A_C \cap B_A B_C$. **Triunghiul** ABC **și** **triunghiul ortic al triunghiului** ABC **sunt omologice.**
Demonstrație. vezi „Triunghiul lui Grebe”.

16) Triunghiul Vecten exterior $O_A O_B O_C$ **are aria egală cu**

$$A_{[O_A O_B O_C]} = A_{[ABC]} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}, \text{ unde } a, b, c \text{ sunt lungimile laturilor } BC, CA, AB.$$

Demonstrație.

Alegem un sistem cartezian cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare, iar prin $Z = \Re_X^\varphi(Y)$ înțelegem că punctul Z se obține printr-o rotație de centru X și unghi φ a punctului Y . Avem:

$$B = \Re_{O_A}^{\frac{\pi}{2}}(C), C = \Re_{O_B}^{\frac{\pi}{2}}(A), A = \Re_{O_C}^{\frac{\pi}{2}}(B), \text{ de unde rezultă } o_A = \frac{b-ic}{1-i}, \quad o_B = \frac{c-ia}{1-i},$$

$$o_C = \frac{a-ib}{1-i}. \quad \text{Atunci:} \quad A_{[O_A O_B O_C]} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} o_A & \overline{o_A} & 1 \\ o_B & \overline{o_B} & 1 \\ o_C & \overline{o_C} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{8} \begin{vmatrix} b-ic & \overline{b+ic} & 1 \\ c-ia & \overline{c+ia} & 1 \\ a-ib & \overline{a+ib} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2i}{8} [(b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} - a\bar{c} - b\bar{a} - c\bar{b}) - i(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) + i(b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + c\bar{b})] \quad (1),$$

$$A_{[ABC]} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} [b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} - a\bar{c} - b\bar{a} - c\bar{b}] \quad (2) \quad \text{și} \quad BC^2 + CA^2 + AB^2 =$$

$$|c-b|^2 + |a-c|^2 + |b-a|^2 = (c-b)(\bar{c}-\bar{b}) + (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) =$$

$$2[3R^2 - (b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + c\bar{b})], \text{ deci } b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + c\bar{b} = 3R^2 - \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2}$$

(3) (unde $|a| = |b| = |c| = R$ - raza cercului circumscris triunghiului ABC). Din relațiile (1),

$$(2) \quad \text{și} \quad (3) \quad \text{rezultă :} \quad A_{[O_A O_B O_C]} = A_{[ABC]} + \frac{1}{4}[3R^2 - (b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + c\bar{b})] =$$

$$A_{[ABC]} + \frac{1}{4} \cdot \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2} = A_{[ABC]} + \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{8}.$$

17) Triunghiul Vecten interior $O'_A O'_B O'_C$ are aria egală cu $A_{[O'_A O'_B O'_C]} = A_{[ABC]} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$,

unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, AB .

Demonstrația este analoagă celei precedente.

III.49. Triunghiurile Sharygin

„...poezia nu este lacrima
ea este însuși plânsul
plânsul unui ochi neinventat
lacrima ochiului
celui care trebuie să fie frumos,
lacrima celui care trebuie să fie fericit.”
Nichita Stănescu²²⁸

În triunghiul ABC fie A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare și A'', B'', C'' picioarele bisectoarelor exterioare. Punctele de intersecție ale mediatoarelor segmentelor AA', BB', CC' sunt vârfurile primului triunghi Sharygin. Mediatoarele segmentelor AA'', BB'', CC'' se intersectează în trei puncte care sunt vârfurile celui de-al doilea triunghi Sharygin.

1) Triunghiul de contact al triunghiului ABC și primul triunghi Sharygin al triunghiului ABC sunt omotetice.

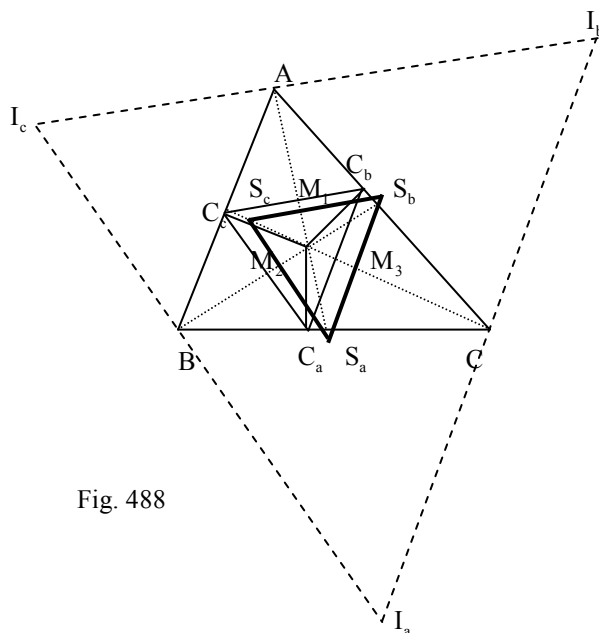


Fig. 488

²²⁸Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române

Demonstrație. Fie $S_a S_b S_c$ primul triunghi Sharygin al triunghiului ABC , $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Deoarece triunghiul $AC_b C_c$ este isoscel rezultă că $C_c C_b \perp AI$; cum și $S_b S_c \perp AI$ rezultă $C_c C_b \parallel S_b S_c$. Analog $C_a C_b \parallel S_a S_b$ și $C_a C_c \parallel S_a S_c$ (1). Fie M_1, M_2, M_3 mijloacele bisectoarelor AA', BB', CC' . Fie $\{A_1\} = S_a S_c \cap BC$ și $\{A_2\} = S_a S_b \cap BC$. Avem $m(\angle A_1 S_a A_2) = 180^\circ - [m(\angle S_a A_1 A_2) + m(\angle S_a A_2 A_1)] = 180^\circ - [m(\angle BA_1 M_2) + m(\angle M_3 A_2 C)] = 180^\circ - \left[90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle B) + 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle C) \right] = \frac{1}{2} [m(\angle B) + m(\angle C)]$ și $m(\angle C_b C_a C_c) = m(\angle C_b C_a I) + m(\angle C_c C_a I) = m(\angle C_b C I) + m(\angle C_c C I) = \frac{1}{2} [m(\angle C) + m(\angle B)]$, deci $\angle S_b S_a S_c \equiv \angle C_b C_a C_c$. Analog, $\angle S_a S_b S_c \equiv \angle C_a C_b C_c$, adică triunghiurile $S_a S_b S_c$ și $C_a C_b C_c$ sunt asemenea (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că triunghiurile $S_a S_b S_c$ și $C_a C_b C_c$ sunt omotetice.

2) Consecință: Unghiurile primului triunghi Sharygin $S_a S_b S_c$ corespunzător triunghiului ABC au măsurile egale cu $90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle A)$, $90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle B)$, respectiv $90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle C)$.

Demonstrație. În proprietatea precedentă am arătat că $m(\angle S_c S_a S_b) = \frac{1}{2} [m(\angle B) + m(\angle C)] = \frac{1}{2} [180^\circ - m(\angle A)] = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle A)$. Analog se arată că $m(\angle S_a S_b S_c) = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle B)$ și $m(\angle S_a S_c S_b) = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle C)$.

3) Triunghiurile Sharygin sunt asemenea.

Demonstrație. Fie $S'_a S'_b S'_c$ cel de-al doilea triunghi Sharygin, A'', B'', C'' picioarele bisectoarelor exterioare și M'_1, M'_2, M'_3 mijloacele segmentelor AA'', BB'' respectiv CC'' , $\{P\} = S'_b S'_a \cap BC$, $\{R\} = S'_b S'_c \cap BC$. Avem: $m(\angle A'' R S'_b) = m(\angle M'_1 R B) = 360^\circ - \left[90^\circ + (180^\circ - m(\angle B)) + \left(90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle A) \right) \right]$ (3). Din triunghiul $PM'_3 C$ avem: $m(\angle M'_3 P C) = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle B) \right) = \frac{1}{2} m(\angle C)$ (4). Din relațiile (3) și (4) rezultă că $m(\angle P S_b' R) = 180^\circ - [m(\angle S_b' P R) + m(\angle S_b' R P)] = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle B)$. Atunci, $m(\angle S'_a S'_b S'_c) = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle B)$ și analog se arată că $m(\angle S'_b S'_a S'_c) = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle A)$, $m(\angle S'_a S'_c S'_b) = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\angle C)$. Din relațiile de mai sus și consecința precedentă rezultă că triunghiurile lui Sharygin $S_a S_b S_c$ și $S'_a S'_b S'_c$ sunt asemenea.

Observație: Unghiurile celui de-al doilea triunghi Sharygin corespunzător triunghiului ABC au măsurile egale cu $90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$, $90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B)$, $90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C)$.

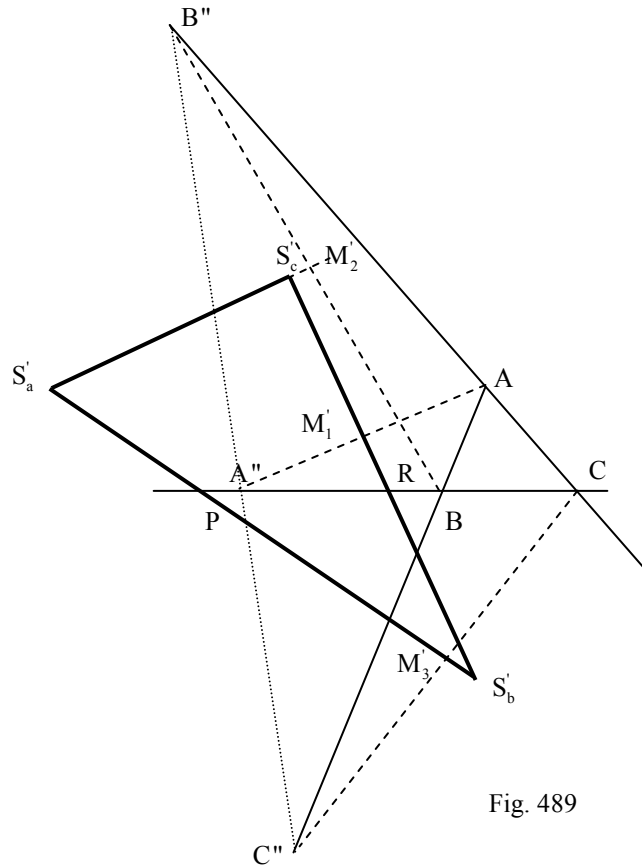


Fig. 489

4) Primul triunghi Sharygin $S_a S_b S_c$ al triunghiului ABC și triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ al triunghiului ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Deoarece $m(\sphericalangle I_c A I) = 90^\circ$ (Fig. 489) rezultă $I_c I_b \perp AI$ și cum $S_c S_b \perp AI$ rezultă $I_c I_b \parallel S_c S_b$. Analog, $I_a I_b \parallel S_a S_b$ și $I_a I_c \parallel S_a S_c$ (5). Cum

$$m(\sphericalangle B I_a C) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A), \quad m(\sphericalangle C I_b A) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC) \quad \text{și}$$

$m(\sphericalangle A I_c B) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle ACB)$ rezultă că triunghiurile $I_a I_b I_c$ și $S_a S_b S_c$ sunt asemenea și utilizând relațiile (5) rezultă că triunghiurile $I_a I_b I_c$ și $S_a S_b S_c$ sunt omotetice.

5) Al doilea triunghi Sharygin $S'_a S'_b S'_c$ al triunghiului ABC este asemenea și omologic cu triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $m(\square BI_aC) = m(\square S'_aS'_bS'_c) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\square A)$ și

$m(\square CI_bA) = m(\square S'_aS'_bS'_c) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\square B)$ rezultă că triunghiurile $S'_aS'_bS'_c$ și $I_aI_bI_c$ sunt asemenea. Deoarece punctele A'', B'', C'' sunt coliniare (ele aparținând axei ortice a triunghiului ABC), atunci M'_1, M'_2, M'_3 sunt mijloacele patrulaterului complet $B''A''BAC''C$ și conform teoremei lui Gauss sunt coliniare (aparțin drepteii lui Gauss). Deoarece $\{M'_1\} = I_bI_c \cap S'_bS'_c$, $\{M'_2\} = I_aI_c \cap S'_aS'_c$ și $\{M'_3\} = I_aI_b \cap S'_bS'_a$ din reciproca teoremei lui Desarguss rezultă că dreptele $I_aS'_a, I_bS'_b$ și $I_cS'_c$ sunt concurente, triunghiurile $S'_aS'_bS'_c$ și $I_aI_bI_c$ fiind astfel omologice.

6) Triunghiurile Sharygin ale triunghiului ABC sunt omologice cu triunghiul ABC , axa de omologie fiind dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $\{X\} = S_bS_c \cap BA$, $\{Y\} = S_bS_c \cap AC$, $\{L_1\} = S_bS_c \cap BC$, A' piciorul bisectoarei din A . Deoarece S_cS_b este mediatoarea segmentului AA' și AA' este bisectoarea unghiului $\square BAC$ rezultă că patrulaterul $AXA'Y$ este romb. Din teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC și transversala L_1, X, Y avem: $\frac{L_1B}{L_1C} \cdot \frac{XA}{XB} \cdot \frac{YC}{YA} = 1$, unde

$$\frac{L_1B}{L_1C} = \frac{XB}{YC} \quad (\text{deoarece } XA \equiv YA) \quad (6).$$

$$\text{Deoarece } XA' \square AC \text{ rezultă } \frac{XB}{AB} = \frac{BA'}{BC},$$

$$\text{adică } XB = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^2}{b+c} \quad (7) \text{ iar din}$$

$$YA' \square AB \text{ rezultă } \frac{YC}{YA} = \frac{CA'}{BC},$$

$$YC = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{b+c} \quad (8). \text{ Din relațiile (6),}$$

$$(7) \text{ și } (8) \text{ rezultă } \frac{L_1B}{L_1C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2. \text{ Analog, dacă}$$

$$\{L_2\} = S_aS_c \cap AC, \quad \{L_3\} = S_aS_b \cap AB \text{ rezultă } \frac{L_2C}{L_2A} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ și } \frac{L_3A}{L_3B} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \text{ de unde}$$

$$\frac{L_1B}{L_1C} \cdot \frac{L_2C}{L_2A} \cdot \frac{L_3A}{L_3B} = 1, \text{ iar din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele } L_1, L_2 \text{ și } L_3$$

sunt coliniare deci triunghiurile $S_aS_bS_c$ și ABC sunt omologice. Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC intersectează dreapta BC într-un punct A_1 care are

$$\text{proprietatea } \frac{A_1B}{A_1C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2. \text{ Atunci, } \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{L_1B}{L_1C} \text{ de unde : } \frac{A_1B}{A_1C - A_1B} = \frac{L_1B}{L_1C - L_1B} \text{ adică}$$

$$\frac{A_1B}{BC} = \frac{L_1B}{BC} \text{ egalitate echivalentă cu } A_1B = L_1B \text{ și deoarece } A_1 \text{ și } L_1 \text{ sunt de aceeași parte a}$$

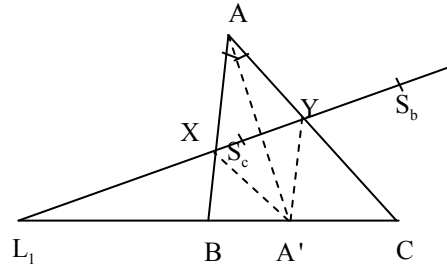


Fig. 490

lui B pe dreapta BC rezultă că punctele A_1 și L_1 coincid, deci L_1 aparține dreptei lui Lemoine a triunghiului ABC . Analog se arată că L_2 și L_3 aparțin dreptei lui Lemoine, deci axa de omologie dintre primul triunghi Sharygin și triunghiul ABC este dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC . Analog se arată că triunghiul ABC este omologic și cu cel de-al doilea triunghi Sharygin.